第12章　２次関数

12.0　はじめに

前章に続いて関数について解説します。本章のテーマは「２次関数」です。

中学校のときにも少しだけ２次関数について学習していますが，ここでは一般の２次関数について，そのグラフや性質を紹介します。そして実は，一般の２次関数のグラフは中学校のときに学習した $y = ax^2$ の形をした特別な２次関数のグラフと合同になることが示されます。これが第１節の内容です。

目次を見れば分かるように，これだけのことを示すために本章の約半分のスペースを割いてあります。これから１次関数の場合に比べると，２次関数というものは大分複雑であることが想像できるでしょう。通常教室や市販の参考書では触れられないような，しかし多くの生徒諸君がつまづいてしまうような所を詳しく説明したためにこれだけの長さになったのでした。じっくりと取り組み，自分のものにしていってほしいと思います。

第２節ではグラフの平行移動について説明しています。これは後の章で詳しく扱う予定である「図形と方程式の関係」という，大きなテーマの予告編のようなつもりで触れました。よって証明は与えていません。そうはいうものの，慣れておくと，後が大分楽になるでしょう。

第３節から第５節は１次関数の場合と同様な節構成となっています。１次関数との扱い方の違い，結果の相違について注意を払って読むと，関数というものの理解が深まるでしょう。

12.1　２次関数とそのグラフ

12.1.1　２次関数

先の章でかなり詳しく１次関数について復習しました。本章ではその続きとして２次関数について解説します。

まずは２次関数の定義とそのグラフについてです。

定義 (２次関数)　y が x の関数で，

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad (a,\ b,\ c \text{ は定数}，a \neq 0)$$

と表されるとき，y は x の **2 次関数**であるという。 **(定義終)** **2 次関数**

前章「1 次関数の復習」で 1 次関数を定義したときに，脚注で一般の n 次関数について触れましたが，2 次関数とは二つの変数の関係が 2 次式で表されるようなもののことをいいます。きちんとした定義は上に与えたとおりですが，ここではなぜ 2 次関数を考えるのか，その理由について簡単に触れてこうと思います。

16 世紀にガリレイがはじめて落体（らくたい）の法則を調べ，式で表現しました。それによると，物体をある高さから落としたとき，落ちた距離は時間の 2 乗に比例する。つまり落ちた距離を s, 経過した時間を t とすると，

$$s = kt^2, \qquad (k \text{ は比例定数})$$

と表すことができる，というものでした。

ここに特殊な形ですが，2 次関数が登場しています。

もう少し一般に，斜めに投げ上げたときの物体の動きを式で表すこともでき，そこで一般の 2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c$$

という形が現れるのです。（投げ上げた地点を原点とし，垂直方向を y 軸に，水平方向（物体の運動する方向）を x 軸にとった）[1]。

このあたりのことは，高校の物理で学習することになっているので，ここではこれ以上深入りしませんが，2 次関数を調べることの数学以外での必要性を感じ取っておいてください。

また数学においても 2 次関数を研究する必然性があります。実際，後で触れることになりますが，2 次関数のグラフには**放物線** という名前がついています。そしてこの曲線自身はすでに紀元前に発見されていたのです！[2] **放物線**

一方 16 世紀にデカルトというフランスの数学者・哲学者の創始した，後に解析幾何学と呼ばれる数学の一分野において放物線を式で表現すると，

$$y = ax^2 + bx + c$$

となることが結論できます。これによって放物線という図形の性質を，$y = ax^2 + bx + c$ という式を用いて研究する道が開かれました。

このように 2 次関数というものが自然科学のみならず，数学それ自身においても重要な位置を占めているのです。

---

[1] これが 2 次関数のグラフを「放物線」と呼ぶ理由です。

[2] 実は放物線が単独で発見されたわけではなく，円・楕円・双曲線とワンセットで発見されていました。そして放物線を含めたこれら四つの曲線は **円錐曲線**（えんすいきょくせん），あるいは **二次曲線** と呼ばれます。（なぜこのように呼ばれるのかについては——かなり後になると思いますが——後の章で詳細に解説しましょう）。

そして再び物理（というより天文学ですが）において天体の描く軌道が楕円や放物線になっていることがわかり，注目を集めることになるのです。

12.1.2　2 次関数のグラフ

さてこれからわれわれは，2 次関数の性質をいろいろと調べていきたいのですが，まずは状況を把握（はあく）するために，2 次関数のグラフがどのようになっているのかを見ていきましょう[3]。

2 次関数のグラフを描くには，前章「1 次関数の復習」で説明したように，x にいろいろな値を代入して対応する y の値を計算し，それをグラフ用紙にとり，つなげていけばよい。

これだけではなかなかわかりにくいでしょうから，ちょっとやってみましょう（これだけの説明で何をすればいいのかわかった人は，先を読む前に次の例のグラフを自分で描いてみてほしい）。

例　$y = x^2 - 2x - 1$ のグラフを描いてみよう。

まずは

x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$										$\cdots$

のような表を用意し，y の欄（らん）を埋めましょう。たとえば x が -4 に対応する y の値は 23 となります。以下残りの八つの欄を埋めるとそれぞれの x に対応する y の値が分かります。

次に，こうやって得られた数の組を座標に持つ点をグラフ用紙にとっていきましょう。たとえば x が -4 に対応する y の値が 23 なので $(-4,\ 23)$ という点をとります（座標軸の目盛りの取り方によっては，今の場合 y 座標が大きすぎてグラフ用紙に入らないかもしれません。そのような場合には $(-4,\ 23)$ という点をとったつもりで次の点を打ちます）。

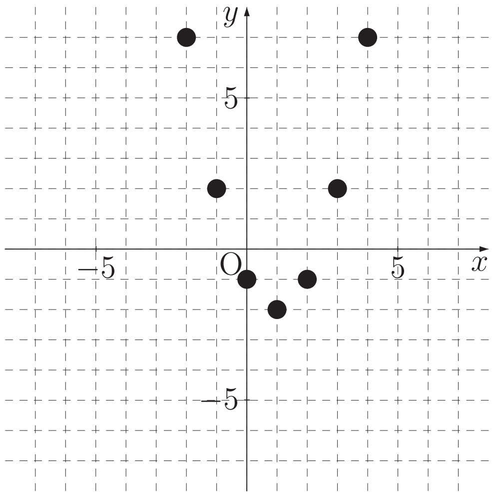
すると下の図のようになるでしょう。この図では目盛りの取り方から $x = -4$ と $x = -3$ に対応する点が取れませんでした。また点は少し大き目にとってあります。実際に皆さんが描くときには自分に分かる程度の大きさで構いません。

ここまでの作業だけでも，2 次関数と 1 次関数の違いがはっきり認識できるでしょう。そう，2 次関数のグラフは直線ではありません。もっともこれは，グラフが直線になるような関数は 1 次関数しかないことをすでに証明しているので，驚くことではありません。

また 2 次関数のグラフの特徴として，この図から $x = 1$ あたりの直線について対称になっていそうなことも感じ取れるでしょう（敏（さと）い人は表を作っているとき

[3] 1 次関数のところでも述べたように，全体的な状況を把握するにはグラフを描いてみるのが手っ取り早い。慣れてくれば式の形からも関数の性質を推測することができますが，今のところわれわれにはそれだけの蓄積がありません。

高校数学をある程度まで習得すれば，それも可能になってきます。後のほうの章で機会があったら，そういったことを実際におめにかけましょう。



にこういったことを感じ取っていたかもしれませんね)。もちろんこれはまだ「感じ」であって，正しいかどうかはわかりません[4]。

もう少し詳しく状況をつかむために，今 x として整数の値を考えましたが，もっと間隔を狭く，たとえば 0.5 おきにして y の値を計算し，グラフ用紙に書き込んでみましょう。

問 60 上の表の x の欄を $-4,\ -3.5,\ -3,\ \cdots,\ 2.5,\ 3,\ 3.5,\ 4$ と 0.5 刻(きざ)みで書き直し，できあがった表をもとにグラフ用紙に点を追加せよ。計算が面倒なら電卓を使ってもよい。

どうでしょう。状況がよりはっきりしてきたと思います。以下間隔をもっと細かく，たとえば 0.1 刻みとか，0.01 刻みの表を作ればより細かい精度のグラフを描くことができます。

もっとも 0.01 刻みで計算するのは——電卓があればできないことはありませんが——大変です。こういったことは機械にやらせるべき仕事でしょう。実際，最近ではこういった関数のグラフを手軽に描いてくれる，パソコン用のソフトが結構あります。その手助けを得て描いたのが上のグラフです。

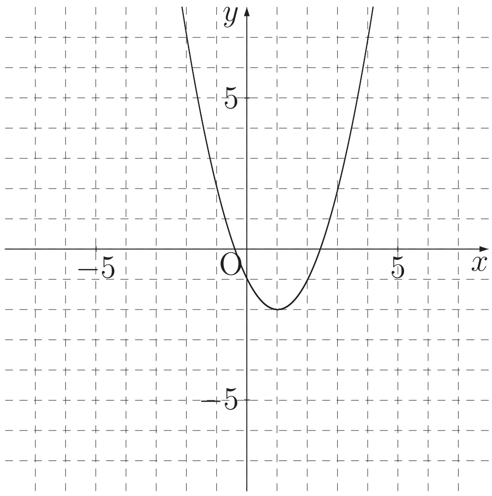
このグラフから少なくとも次のことが読み取れるでしょう。

- 2 次関数のグラフは曲がった線（曲線という）となる。
- ある直線に関して対称になっている。

2 次関数のグラフはまだ他にも特徴を持っています。それを知るためには 2 次関数のグラフをたくさん描き，共通する性質をあぶりだしていくことになります。

実感を得るにはそうするのが一番いいのですが，時間がかかりすぎるので，以下では既に知られている結果を紹介していくことにします。そしてまずみなさん

[4] しかしきちんと証明できれば正しいことが確認できます。これは後の課題ですね。



には，典型的な式の形をした 2 次関数のグラフの描き方を習得してもらうことにしたいと思います。 **(例終)**

次の練習に出てくる 2 次関数については，後続の節でグラフの描き方を説明します。しかし皆さんには少し経験を積んでおいてほしいので，面倒だとは思いますが必ずやっておいてほしい。もちろん電卓を使ってかまわないし，グラフを描くソフトを持っている（あるいはそういった事ができるプログラムを書ける（！））ならそれを使っても構いません。

練習 106 上の例に倣(なら)って，次の関数のグラフを描け。
これらのグラフと式の間には，どのような関係が成り立っていそうか。できるだけたくさん挙げよ。そして以下の節を，それらが正しいかどうかを確かめることに意を注ぎながら読め。

(1) $y = 2x^2$
(2) $y = 2x^2 + 1$
(3) $y = 2(x-1)^2$
(4) $y = 2x^2 - 4x + 3$

12.1.3 $y = ax^2$ のグラフ

先の節で具体的な 2 次関数のグラフを描いてみました。ここからの数節の目的はもっとも一般的な 2 次関数——それは $y = ax^2 + bx + c$ と表される——のグラフを描く方法を説明することにあります。そしてこの節では，その第一歩であり，もっとも単純な 2 次関数——それは $y = ax^2$ と表される——のグラフがどうなっているのか，そこから見出されるグラフの特徴などを説明しましょう。ストーリーは第 9 章「2 次方程式の解法」と大分似ています。

実はこの節の内容はすでに中学校で学習済みです。よって記憶の新しい人はまとめとして，あまりよく覚えていない人，あるいははじめて 2 次関数に接する人はじっくりと取り組んでください。

もっとも単純な2次関数は，上で触れたように $y = ax^2$（ただし a は0でない定数）という式で表現されます。この式は x^2 を一つのものと見ることで，次のように表現することもできます（ある程度の固まりを一つのものと見るという式の見方を第2章「整式の基礎」でやっています）。

定義（x^2 **に比例する関数**）　y が x の関数で，

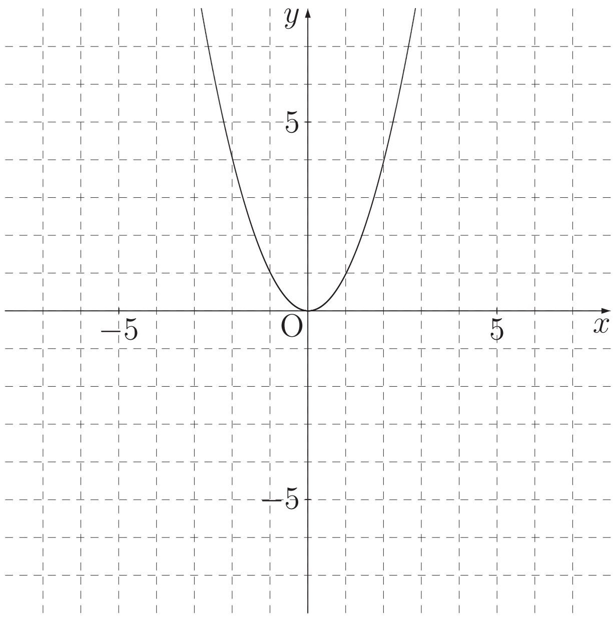
$$y = ax^2 \qquad \text{（ただし } a \text{ は0でない定数）}$$

と書けるとき，y **は** x^2 **に比例する** という。　　**（定義終）**　x^2 **に比例する**

さて $y = ax^2$ と表すことのできる2次関数のグラフをいくつか描いてみましょう。このような形の2次関数の中でもさらにもっとも単純なものは $a = 1$ の場合，つまり $y = x^2$ です。

例　$y = x^2$ のグラフ。

先の節でやったのと同じ方法で描いていきます。その方法には慣れていると思うので，ここでは結果だけ下に示しましょう。



さてこのグラフはどのような特徴を持っているでしょう。
まず先の節でも触れましたが，

- 2次関数のグラフは曲がった線（曲線という）となる。
- ある直線に関して対称になっている。

もう少し詳しく言うと，

- グラフは滑らかな曲線を描く[5]。
- y 軸に関して対称である[6]。

これ以外にも

- x 軸より下にはグラフは現れない[7]。
- 下に尖がった（とはいうものの三角形の頂点のように本当に尖がっているわけではありません！　あくまでも滑らかである）形をしている（これを **下に凸** といいます[8]）。 **下に凸**

これに関連して，$y = x^2$ のグラフの点 $(0,\ 0)$ をこのグラフの **頂点** といいます。 **頂点**
これは点 $(0,\ 0)$ が三角形の頂点のような位置にあるように見えることからの言葉の流用です。

言い換えると原点は $y = x^2$ のグラフの頂点です。 **(例終)**

さて $y = x^2$ のグラフは上のような特徴を持つことがグラフから読み取れましたが，次の問題はこれらの特徴はどんな 2 次関数についてもいえるものなのか，それとも $y = x^2$ のグラフに特有のことなのか，それを見ることです。そのためにはもっとたくさんのグラフを描いてみる必要があります。

たとえば $y = x^2$ の次に単純な 2 次関数である $y = -x^2$ （$a = -1$ の場合）を観察しましょう。

このグラフは下のようになります。

$y = x^2$ のグラフと見比べて，どこが同じでどこが異なっているでしょう。

すぐに分かると思いますが，

---

[5]曲線の「滑らかさ」は数学的に厳密に定義することができます。それは「関数の微分可能性」というものでなされますが，これについてはこのシリーズのもっとも後——微分積分という数学の一分野——で皆さんに紹介することになるでしょう。

それまでは「尖ったところがない曲線」と覚えておけば十分です。

[6]精確に言えば「y 軸に関して対称であるように見える」のであって，これは数学的に厳密に証明されるべきことです。

もっとも証明する際に,「ある直線について対称である」ということはどういうことなのか，式を使ってきちんと定義する必要があります。これについては後で厳密に証明して見せましょう。

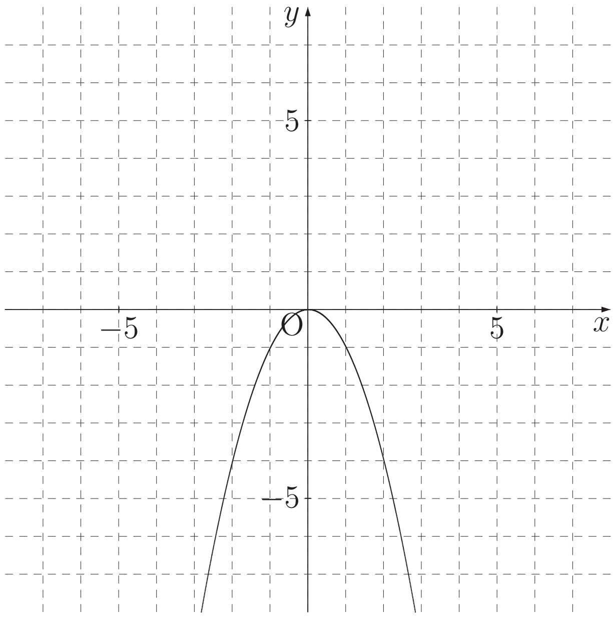
今のところはこのグラフ用紙を y 軸に沿って折って透かしてみたときに，グラフが重なることを確かめておいてくれれば十分です（実行せよ！）。

[7]これは $y = x^2$ のグラフがどのような形をしているのか分からなかったので仕方ありませんが，x 軸より下のグラフ用紙の部分が無駄になってしまいました。今後はこういうことがないように，覚えておきましょう。

[8]「凸」って字（！）は漢字だったって知ってました？　きちんと書けるように，書き順を調べておくように（あんな順序で書くとは，私には意外でした）！

ちなみにこれと反対の意味の漢字は「凹」（これも書き順を調べておくこと）。

それゆえ「凹凸」と書いて「おうとつ」と読みます。ついでに「凸」,「凹」を使ったことばをいくつか辞書で調べておくといいでしょう。



- グラフは滑(なめ)らかな曲線を描く

と

- y 軸に関して対称である。

の二つは変わりません。しかし

- x 軸より下にはグラフは現れない。

および

- 下に尖がった形をしている。

わけではありません。

では $y = x^2$ のグラフと $y = -x^2$ のグラフはまったく異なったものなのでしょうか？　実はそうではなく，似ているところがあります。

実際，

- x 軸より下にはグラフは現れない。

は

- x 軸より **上** にはグラフは現れない。

であるし，

- 下に尖がった形をしている。

は

- **上** に尖がった形をしている（これを先の場合に倣って **上に凸である** という）。 **上に凸**

のである。

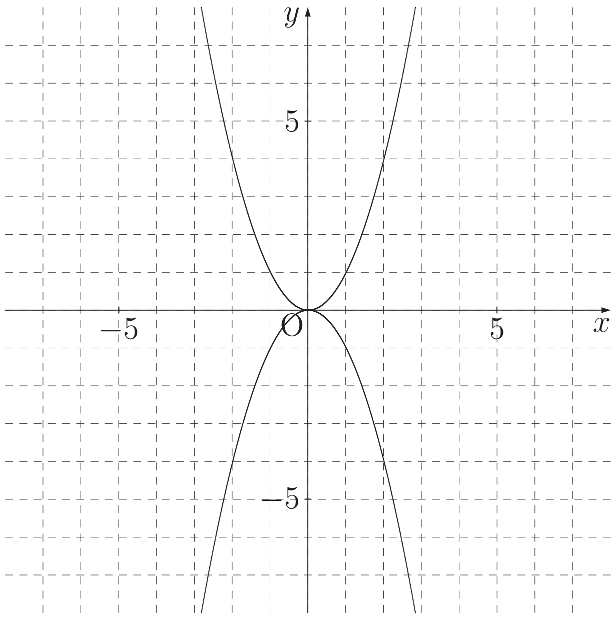
そこでは「上」という言葉と「下」という言葉が入れ替わっただけであることが分かるでしょう。

よって，いずれにも共通する特徴として

- グラフは滑(なめ)らかな曲線を描く
- y 軸に関して対称である
- x 軸より下（あるいは上）にはグラフは現れない
- 下（あるいは上）に尖がった形をしている（言い換えると下に凸か，上に凸である）

ということがいえるといっていいでしょう。

またこれらのグラフの間には顕著な関係があります。それはこれら二つのグラフを一つの座標平面に描いてみるとはっきりします（次ページの図参照）。



x 軸を中心として鏡で映したような状況になっています（x 軸に沿って折ってみて，確かにそうなっていることを確認してください）。これを「$y = x^2$ のグラフと $y = -x^2$ のグラフは x 軸に関して対称である」というのでした。

対称な図形は重ねあわせることができます。つまり「合同」です[9]。

[9] 平行移動や回転，対称移動によって重ねあわせることができる二つの図形は**互いに合同である**というのでした。

中学校では専(もっぱ)ら三角形の合同を扱ってきましたが，上の合同の定義はどのような図形についても当てはめることができます。

それゆえ「上」と「下」が入れ替わるのは当たり前といえるでしょう。

ところで，$y = x^2$ のグラフと $y = -x^2$ のグラフの違いはいったいどこから生まれたのでしょうか?

この二つで変えたところは $y = ax^2$ の a の部分です。一方は $a = 1$，もう一方は $a = -1$ です。言い換えると一方は正，もう一方は負です。

では a を 1 以外の正の数にとったとき $y = ax^2$ のグラフはどうなるでしょう。

$a = 2$ ，つまり $y = 2x^2$ のグラフを描いてみましょう。すると次ページの図のようになります。

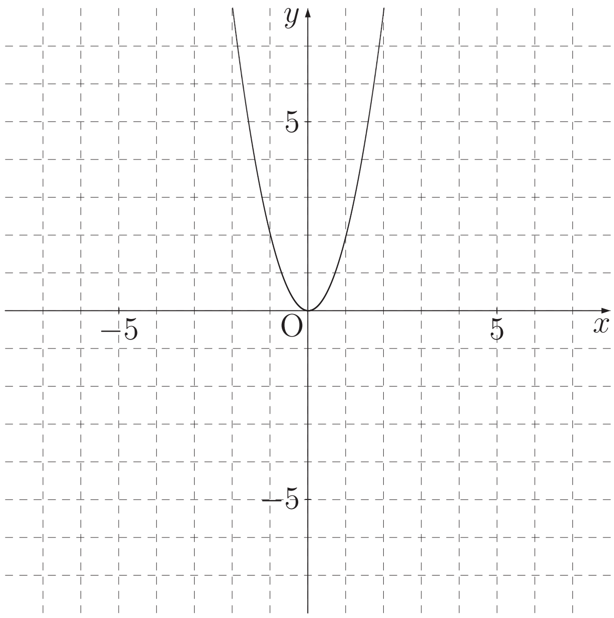


図 12.1: $y = 2x^2$ のグラフ

ふむ，$y = x^2$ のグラフと同じような特徴を持つようです。しつこいようですが繰り返すと，

- グラフは滑(なめ)らかな曲線を描く
- y 軸に関して対称である
- x 軸より下にはグラフは現れない
- 下に凸である

といった特徴を持っています。

では同じように a を 1 以外の負の数にとったとき，グラフはどうなるでしょう？

たとえば $a = -2$ ，つまり $y = -2x^2$ のグラフを描いてみましょう。これは上のようになり，$y = -x^2$ のグラフと同じような特徴を持っていることが分かります。

ここまでくると，次のことが予想できるでしょう。すなわち

予想　$y = ax^2$ のグラフは

- $a > 0$ のときは下に凸
- $a < 0$ のときは上に凸

この予想は正しいでしょうか？　補強するために次の問をやってみてほしい。

問 61 $y = 3x^2$ のグラフと $y = -3x^2$ のグラフを描き，予想が正しそうなことを確認せよ。

上の予想の厳密な証明は後回しにします。実際，グラフが上に凸であるとか，下に凸である，ということの定義が曖昧(あいまい)なので，厳密な証明ができません。
「グラフが上（下）に凸である」ことの定義は，その証明の仕方が理解できるような準備ができた段階で与え，その応用例としてこの予想を証明してみせましょう。これらのことから，今のところこの予想が正しいものとして先に進むことにします。
まとめると，

定理 ($y = ax^2$ **のグラフの特徴**)
2 次関数 $y = ax^2$ のグラフは

- グラフは滑(なめ)らかな曲線を描く
- y 軸に関して対称

であり，

- $a > 0$ のときは下に凸
- $a < 0$ のときは上に凸

である。

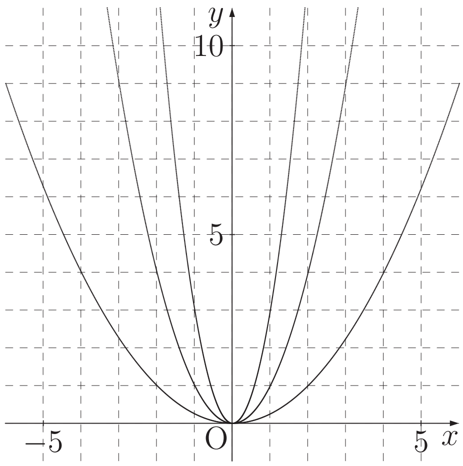
定義 (軸，頂点)　$y = ax^2$ のグラフは y 軸について対称だった。そこでこの対称軸を，放物線の **軸** ，軸と放物線の交点を **頂点** という。 **(定義終)** **軸** **頂点**

注意　この定義はこの後説明する一般の 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフのようすを先取りしたものです。
実際，一般の 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフはある直線について対称であり（それを「軸」と呼ぶ），$y = ax^2$ の頂点である $(0,\ 0)$ に相当する点があります（それを「頂点」と呼ぶ)。このあたりのことは，後でもう一度確認しましょう。 **(注意終)**

この節も大分長くなってしまいましたが，$y = ax^2$ についてはもう一つ触れておくべきことがあります。それは x^2 の係数である a によるグラフの形の変わり方です。

１次関数 $y = ax + b$ の a にはグラフの傾き具合という意味がありました。ここでも同様のことが成り立っているので，触れておきましょう。

a が正の場合と負の場合の違いについては上に触れたとおりですが，たとえば a が正でいろいろと変化したときグラフがどうなるか，見てみましょう。



図を見てください。三つほど描いてあります。いずれも $y = ax^2$ のグラフなのですが，式が読み取れるでしょうか？

要は x^2 の係数である a がグラフから読み取れればよい。どうすればいいでしょう？

実は，中学校のときに同じようなことを 1 次関数でやっています。そのときは，$x = 1$ のときの y の値をみればよかった，ということを思い出してください。今の場合も $y = ax^2$ において $x = 1$ とすると $y = a$ となり，$x = 1$ のときの y の値がそのまま比例定数 a になっています。

この考え方を右のグラフに適用すると，内側の二つがそれぞれ $y = x^2$ と $y = 3x^2$ であることが判明します（どっちがどっちなのかはわざと言わないことにしましょう。それを判断するのは難しくないと思うので）。

しかし一番外側のグラフについてはうまくいきません。実際 $x = 1$ のときの値がうまく読み取れないからです（大体の値は読み取れるでしょうが，確信は持てないでしょう）。そこでこれについてはもう一工夫が必要となります。

$y = x^2$ と $y = 3x^2$ はなぜうまく読み取れたのでしょう？　それはいずれのグラフも $x = 1$ のときの y の値が 1 や 3 という整数になっており，ちょうどグラフ用紙の目盛りのところを曲線が通っていたことにあります。一方一番外側のグラフはそうなっていません。それならちょうど目盛りを通るようなところを探せばいいですね。

というわけでそのようなところを探すと，(2, 1) が見つかります（それ以外のところは微妙にずれています！　よく見るように !! ）。つまり $x = 2$ のとき $y = 1$

です。これらを $y = ax^2$ に代入すれば $1 = 4a$ 。つまり式は $y = \dfrac{1}{4}x^2$ であることが判明します[10]。

まとめると，一番内側のグラフの式が $y = 3x^2$，まんなかが $y = x^2$，一番外側が $y = \dfrac{1}{4}x^2$ です。

これらのグラフから次のことが予想できるでしょう。

定理 ($y = ax^2$ **のグラフの** a **による変化**)　$y = ax^2$ のグラフは a の値が大きくなるほど開き方が狭くなる。

あるいは a の値が小さくなるほど開き方が広くなる。

しかしこの予想は $a > 0$ のときのものばかりから得たものです。このように言うのは，$a < 0$ のときには若干（じゃっかん）様子が変わるからであり，精確には次のように言うべきであることがわかります。

定理 ($y = ax^2$ **のグラフの** a **による変化**)　$y = ax^2$ のグラフは a の絶対値が大きくなるほど開き方が狭くなる。

あるいは a の絶対値が小さくなるほど開き方が広くなる。

問 62 $a < 0$ のグラフをいくつか描き，上の予想のほうがふさわしいことを確認せよ。

上では定理として述べましたが，その証明は省略します。興味のある人は挑戦してみてほしい。ここではこの結果が正しいことを認めて先に進むことにします。

$y = ax^2$ **のグラフの描き方**　ここでフリーハンドで $y = ax^2$ のグラフを描く際の留意点について触れておきましょう。

1 次関数の場合は，関数のグラフが通る点を二つとり，それらを結ぶ直線を定規を使って引くだけで描けました。しかし 2 次関数のグラフは放物線と呼ばれる曲線なので，定規を使って描くことはできません。つまり，正確なグラフを手で描くことは不可能なのです。

元々何のためにグラフを描くことを考えたのかといえば，関数のもつ性質をグラフから読み取るためでした。ちょっといいかげんな言い方に聞こえるかもしれませんが，実はその目的に対してはそんなに精密なものは必要ありません。つまり大体の形がわかれば，あるいは描けていれば十分なのです。

もし正確なものが必要なら，先に説明したようにできるだけたくさんの x に対応する y の値を計算し，それをグラフ用紙にとっていけばよい。しかしこれだけコンピュータの発達した時代に手計算でグラフを描くのは時代錯誤です（つい 30

[10]数学的にはこれで十分なのですが，念のために得られた式について他の x に対する y を計算し，それがグラフ上の点と一致することを確認しておくことをお勧めします。

年ほど前までは違ったのですがね。コンピュータ関係の技術の進歩には目をみはるものがあります！）。そういう機械的な作業（単なる計算は実に機械的！）は機械にやらせればよいのです。そしてわれわれは機械にできないようなことをすればいいのです。

それゆえ，この一連の節で説明している２次関数のグラフの描き方など，必要ないと思われるかもしれません。

確かに手元にいつでもグラフを描いてくれるようなコンピュータがあれば，それでもいいでしょう。しかしなかなかそのような環境は実現しないだろうし，これから説明する方法によれば紙と鉛筆さえあれば２次関数のグラフは手軽に描けます。紙と鉛筆がなければ机の上に指でだって描けるでしょう。そしてこれからわれわれは，関数のグラフをその関数の性質を読み取るために利用したいのです。繰り返しますが，そんなに精密なものは必要ないのです。大体の形が描ければよい（これをグラフの「概形（がいけい）」といいます）。 **グラフの概形**

では２次関数の概形はどうやって描けばよいでしょう。適当に描けばよいというわけではありません[11]。そこには気を使うべき留意点があります。

本題に入るまで大分長くなりましたが，それを説明しましょう。

まずはここまでに出てきた２次関数のグラフをよく眺（なが）め，その形をよく頭に入れてください。特に，先に挙げた２次関数のグラフの特徴である，滑らかさや軸に関する対称性，頂点付近のグラフの曲がり具合に注意してください。

そして

- まずグラフである曲線を描く。
- 次に頂点に接するように x 軸を描く。
- 頂点を通るように y 軸を描く。
- 最後に $x=1$ のときの y の値のように，代表的な点を書き入れる ($x=1$ のときの y の値が分数などになってしまうときには，y の値が整数になるような x の値を探してその値を書き込む)。

ここで先にグラフを描き，軸を後に引くというのがコツです (x 軸と y 軸は，どちらを先に描いてもよい。状況に応じて順番は変えることになろう)。

理科などで描くグラフの場合，結果がどのような形になるのかまったく予想がつかないので，まず座標軸を描き，そこに点を書き込んでいくという方法を取るしかありません。しかし今の場合，グラフがどのような形になるのか分かっているので，このような順番で描いた方がきれいに描けます。

また最後の代表的な点は，今の場合は１点だけですが，後で分かるように一般の２次関数のグラフを描くときにはもう少し増えます。これについては必要になったところで再び説明することにします。

---

[11] この場合の「適当に」は「いいかげんに」という意味です。

それにしても，たったこれだけのことを説明するのに大分スペースを割いてしまいました。実際に描く様子をお見せできればこんなに文字を費す必要はないのですが，こういった文章による講義の悲しさ，まどろっこしいことこの上ない。

上のことを参考にして，グラフをきれいに描く工夫をしてください。

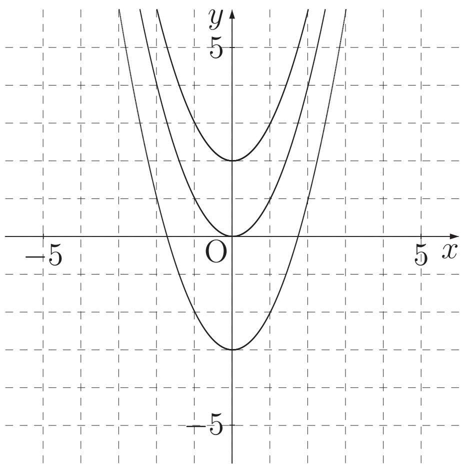
12.1.4 $y = ax^2 + q$ のグラフ

以上で $y = ax^2$ のグラフについては終わりにし，一般の 2 次関数のグラフへ歩みを進めましょう。しかし一気に一般のものへは到達できないので，$y = ax^2$ より少し複雑なものをここでは扱いましょう。

それは $y = ax^2 + q$ （a, q は定数。$a \neq 0$）のグラフです[12]。

先の節と同じように，いくつかグラフを描き，どのようになっているのか様子を観察しましょう。

例 $y = x^2$，$y = x^2 + 2$，$y = x^2 - 3$ のグラフを描こう[13]。それは下のようになります。



$y = x^2$ のグラフはもうおなじみとなったことでしょう。三つのグラフのうち，まんなかのものがそれです。そして上のほうにあるグラフが $y = x^2 + 2$，下のほうにあるのが，$y = x^2 - 3$ のグラフです。

これらを $y = x^2$ のグラフと比べましょう。

まず $y = x^2 + 2$ と $y = x^2$ のグラフを比べると，いずれも同じ形をしています。「同じ形をしている」とは，ちょっと不正確な言い方です。厳密に言いましょう。こ

[12] われわれの記法からすると，$y = ax^2 + c$ と書くべきですが，ここでは伝統に従って $y = ax^2 + q$ としました。なぜこのように書くのかは，一般の 2 次関数のグラフを描きかたの説明のところで明らかになるでしょう。

[13] $y = x^2 - 3 = x^2 + (-3)$ ですから，これも $y = ax^2 + q$ の形の関数になっています。

れら二つのグラフは合同です。実際，$y = x^2$ のグラフを上のほうへ平行移動すれば，$y = x^2 + 2$ のグラフにぴったりと重なるからです[14]。

一方 $y = x^2 - 3$ と $y = x^2$ のグラフも合同であることがわかります。$y = x^2$ のグラフを下のほうへ平行移動すれば，$y = x^2 - 3$ のグラフに重なるからです。

つまり $y = x^2 + 2$，$y = x^2 - 3$ いずれのグラフも $y = x^2$ のグラフを平行移動することで描けます。

ところで，一方は上へ，もう一方は下へ平行移動しました。これらの違いは $y = ax^2 + q$ の定数項 q から生じていることにはすぐ気がつくでしょう。実際，$y = x^2 + 2$ の定数項は 2 で，こちらのグラフは $y = x^2$ のグラフを上へ 2，$y = x^2 - 3$ の定数項は -3 で，こちらのグラフは $y = x^2$ のグラフを下へ 3 平行移動することで描けました。

これから，定数項が正の場合には上へ，負の場合には下へ平行移動する，ということにも気がつくでしょう。

いちいち「上」とか「下」とか言うのでは統一性がないので，下へ 3 移動することは，上へ -3 移動することと同じだったから,「下へ 3 平行移動する」は「上へ -3 平行移動する」といいかえることができます。この表現だと，$y = ax^2 + q$ の定数項 q の値をそのまま使って「上へ q 平行移動する」と言うことができるので，便利です。

これで十分意味がはっきりし，統一もできているのですが，普通教科書では「y 軸方向へ」という言葉を使って，

「$y = x^2 + 2$ のグラフは $y = x^2$ のグラフを y 軸方向へ 2 平行移動したものである」

「$y = x^2 - 3$ のグラフは $y = x^2$ のグラフを y 軸方向へ -3 平行移動したものである」

という言い方をします。この場合「y 軸方向」=「上」と考えてよい（前にも触れたように，座標軸は上向きに y の正の方向を取るのが習慣となっています[15]）。

また $y = x^2 + 2$ のグラフも $y = x^2 - 3$ のグラフも対称軸は y 軸であることには変わりないし，頂点（定義を思い出してください！）はそれぞれ $(0,\ 2)$ と $(0,\ -3)$ になっており，y 座標が関数の式の定数項に等しくなっています。 **(例終)**

以上のことから――証明は省略しますが――次の定理の成り立つことが分かります。

定理 ($y = ax^2 + q$ のグラフ) $y = ax^2 + q$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを y 軸方向へ q だけ平行移動した放物線である。

---

[14]先と同じく，厳密には式の上で確かめる必要があります。

コピーでも取って，重ねあわせて確かめてほしい（コピーを取るのが面倒なら，トレーシングペーパーで $y = x^2$ のグラフを写し取り，$y = x^2 + 2$ のグラフに重ねあわせてみるといいでしょう（トレーシングペーパーってどんなものか知ってますか？）。トレペを用意することを考えると，どっちが面倒かな？　あまり手間は変わらないかもしれない）。

[15]この習慣にしたがっていない人には 「y 軸方向へ」という言い方をしないと誤解されます。

また軸は y 軸，頂点の座標は $(0,\ q)$ である。

もちろん a の正負に応じて下に凸になったり，上に凸になったりしています。

練習 107 次の 2 次関数は何のグラフを y 軸方向へどれだけ平行移動したものか（もちろんグラフは描かずに答えよ)。

(1) $y = 2x^2 + 4$ (2) $y = -3x^2 + 1$

(3) $y = -x^2 - \dfrac{1}{2}$ (4) $y = \dfrac{4}{3}x^2 - 1$

$y = ax^2 + q$ **のグラフの描き方** 以上で $y = ax^2 + q$ の形の 2 次関数のグラフがどのようになっているかが判明しました。ここではそれをもとにして，$y = ax^2 + q$ のグラフの描き方を説明しましょう。

具体例で説明します。

例 $y = x^2 + 4$ のグラフを描く。

先に説明した手順でいえば

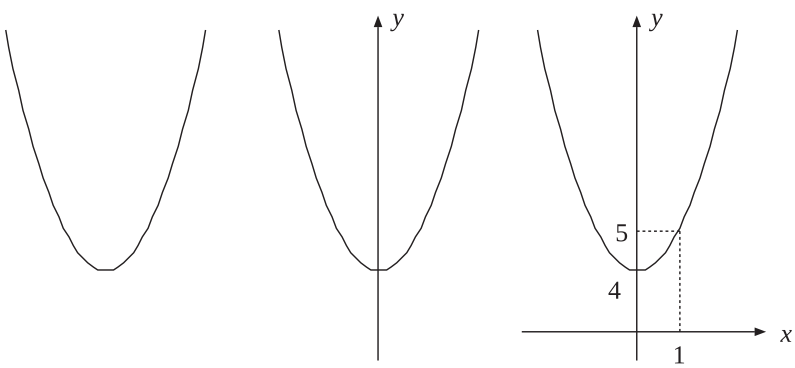
(1) まず曲線を描く (下に凸です!)。

(2) 次に軸を描くのであるが，今の場合対称軸は y 軸に一致しているので，まずは y 軸を引く。

(3) そして頂点は $(0,\ 4)$ であるから，x 軸はグラフより少し下にある。それをにらみながら x 軸を引く。

(4) $x = 1$ のとき $y = 5$ であるから，これを代表点と考えてグラフに書き入れる。この際，頂点の座標も入れておくとよい。

これだけでは分かりにくいでしょうから，上の手順を絵にしてみました。次の図を参考にしてください。 **(例終)**



(1) グラフを描く　(2) y 軸を引く　(3) x 軸を引き，頂点の座標，代表的な点の座標を書き入れる

練習 108 次の 2 次関数のグラフを描け。

(1) $y = 2x^2 + 4$　　(2) $y = -3x^2 + 1$

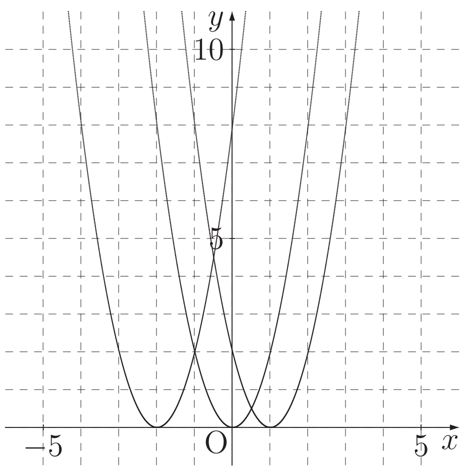
(3) $y = -x^2 - \dfrac{1}{2}$　　(4) $y = \dfrac{4}{3}x^2 - 1$

12.1.5 $y = a(x-p)^2$ のグラフ

今度は $y = a(x-p)^2$ という形をした関数のグラフの描き方を説明しましょう (もちろん a, p は定数で，$a \neq 0$ とします)。

さて，まずはいくつかの例を見てもらいましょう。

例 $y = 2x^2$, $y = 2(x-1)^2$, $y = 2(x+2)^2$ のグラフを見よう。それは下のようになります。



左側が $y = 2(x+2)^2$ のグラフ, 中央が $y = 2x^2$ の, 右が $y = 2(x-1)^2$ のグラフです。

これらがすべて合同なことは，コピーを取って重ねあわせてみればすぐに分かります。そして $y = 2(x+2)^2$ のグラフは $y = 2x^2$ のグラフを x 軸の方向へ -2 平行移動したものであり，また $y = 2(x-1)^2$ のグラフは $y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向へ 1 平行移動したものであることにもすぐに気がつくでしょう。

括弧の中がそれぞれ $x+2$ と $x-1$ に対して，移動する量がそれぞれ -2 と 1 になっています。これは $y = ax^2 + q$ のグラフの場合と異なっています。 **(例終)**

以上の観察から次の定理が成り立っていることが分かります。

定理 ($y = a(x-p)^2$ のグラフ) $y = a(x-p)^2$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを x 軸方向へ p だけ平行移動した放物線である。

また軸の方程式は $x = p$，頂点の座標は $(p,\ 0)$ である。 **軸の方程式**

注意

(1) $y=ax^2+q$ のグラフは $+q$ に対して q 平行移動するのでしたが，$y=a(x-p)^2$ のグラフは $-p$ なのに p 平行移動することになっています。十分注意してください。

(2) 「軸の方程式は $x=p$ 」と書きました。上の例を観察すればわかるように，実際には頂点である $(p,\ 0)$ を通り y 軸に平行な直線が対称軸になっています。点 $(p,\ 0)$ を通り y 軸に平行な直線は $x=p$ と表されたのでした。
なぜ「方程式」というのかも含めた詳細については第 8 章「1 次方程式の復習」参照。
ちなみに y 軸は原点 $(0,\ 0)$ を通るので，$x=0$ と表すことができます。よって $y=ax^2$ の軸の方程式は $x=0$ ということもできます。

(注意終)

練習 109 次の 2 次関数はどのような 2 次関数をどれだけ x 軸方向へ平行移動したものでか。またその頂点の座標と軸の方程式を言え。

(1) $y=2(x-1)^2$ (2) $y=-(x-3)^2$
(3) $y=3(x+2)^2$ (4) $y=-2(x+3)^2$

先のようにまとめることはあえてやらないことにしますが，以上のことから $y=a(x-p)^2$ のグラフを描くことは容易でしょう。

練習 110 次の 2 次関数のグラフを描け。

(1) $y=2(x-1)^2$ (2) $y=-(x-3)^2$
(3) $y=3(x+2)^2$ (4) $y=-2(x+3)^2$

12.1.6 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

さて以上の結果を組み合わせると $y=a(x-p)^2+q$ の形の 2 次関数のグラフを描くのは容易です。

実際 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは $y=a(x-p)^2$ のグラフを y 軸方向へ q 平行移動したものであるし，$y=a(x-p)^2$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを x 軸方向へ p 平行移動したものだからです。

よって

定理 ($y=a(x-p)^2+q$ のグラフ) $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを x 軸方向へ p，y 軸方向へ q 平行移動した放物線である。

また軸の方程式は $x=p$，頂点の座標は $(p,\ q)$ である。

練習 111 次の 2 次関数は $y=-2x^2$ をどのように平行移動したものであるか。また軸の方程式と頂点の座標も答えよ。

(1) $y=-2(x-1)^2+1$ (2) $y=-2(x+2)^2+1$
(3) $y=-2(x-2)^2-1$ (4) $y=-2(x+1)^2-2$

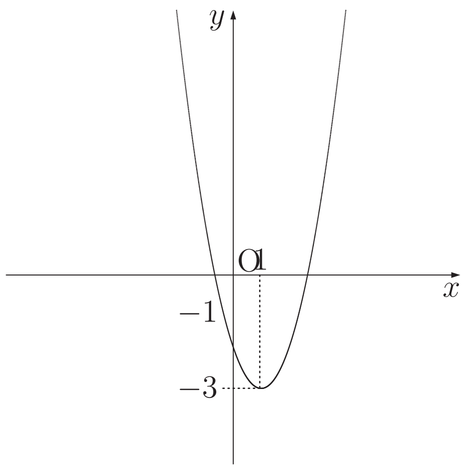
例　$y=2(x-1)^2-3$ のグラフを描く。

この関数のグラフは $y=2x^2$ を平行移動することで描けます。よってまずは下に凸の放物線です。まず下に凸の曲線を描きましょう。

そして頂点の座標は $(1,\ -3)$ ですから，x 軸は頂点より上にあります。つまり曲線と x 軸は２点で交わっています。

最後に y 軸ですが，与えられた式で $x=0$ とすると $y=-1$ となるので，曲線は y 軸と x 軸より下，-1 のところで交わっています。

よってグラフは下の図のようになります。



(例終)

注意　頂点の座標を書き入れることと，y 軸との交点を書き入れることを忘れないように!!

(注意終)

練習 112 次の２次関数のグラフを描け。

(1) $y=-(x-1)^2+2$　　(2) $y=2(x+1)^2+1$

(3) $y=(x-2)^2-1$　　(4) $y=-3(x+1)^2-2$

☆　☆　☆

ここまでで一般の２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを描くための準備が整ったことになりますが，$y=ax^2$, $y=ax^2+q$, $y=a(x-p)^2$, $y=a(x-p)^2+q$ とたくさんあって,「覚えきれないよぉ」という人がいるかもしれません。しかしこれらを全部覚える必要はまったくありません!

実際覚えておく必要のあるのは最後の $y=a(x-p)^2+q$ の場合だけです。なぜなら，$y=a(x-p)^2$ は $y=a(x-p)^2+q$ の q が０になったもの，$y=ax^2+q$ は $y=a(x-p)^2+q$ の p が０になったものと考えることができます。よってたとえ

ば $y=a(x-p)^2$ は $y=ax^2$ を x 軸方向へ p，y 軸方向へ 0 平行移動したもの，つまり x 軸方向のみの移動を考えればよいことになるのです。

このように考えれば $y=a(x-p)^2+q$ 以外の三つはここから導き出せます。

12.1.7 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

一般の 2 次関数は，与えられた式 $y=ax^2+bx+c$ のままではグラフを描くことができません。そのために前節までの準備をしたのでした。

よって $y=ax^2+bx+c$ という式をなんとかして $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形しなければなりません。

以下その方法を具体的な例で説明しましょう。その上で一般の 2 次関数でもそれが可能なことを示すことにします。

例　$y=2x^2-4x-1$ の変形。

まず x^2 の係数である 2 ではじめの二つの項を括(くく)る。

$$y=2(x^2-2x)-1$$

ここで我々は，括弧の中の式 x^2-2x を $(x-p)^2$ の形に変形したい。そのためには $+1$ があればよい。しかしそのままではもとの式に等しくないから帳尻を合わせるために 1 を引いておく。括弧の外にある -1 はひとまずそのままである。

$$2(x^2-2x)-1=2(x^2-2x+1-1)-1$$

x^2-2x+1 を因数分解する。括弧の中の -1 はひとまずそのままにする。

$$2(x^2-2x+1-1)-1=2\{(x-1)^2-1\}-1$$

括弧の中の -1 を外に出す (一番最初に括った 2 とかけ算することを忘れないように！)。

$$2\{(x-1)^2-1\}-1=2(x-1)^2-2-1$$

定数の項を整理する。

$$2(x-1)^2-2-1=2(x-1)^2-3$$

以上の変形を一つにまとめると次のようになる。復習を兼ねてそれぞれの等号のところでどのような変形をしたのか，自分に言いきかせてほしい。

$$\begin{aligned} y &= 2(x^2-2x)-1 \\ &= 2(x^2-2x+1-1)-1 \\ &= 2\{(x-1)^2-1\}-1 \\ &= 2(x-1)^2-2-1 \\ &= 2(x-1)^2-3 \end{aligned}$$

(例終)

途中大分技巧的な部分がありましたが，どうでしょう？

この例の場合の関数 $y=2x^2-4x-1$ は $y=2(x-1)^2-3$ と $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形することができました。

よって関数 $y=2x^2-4x-1$ のグラフは $y=2x^2$ のグラフを x 軸方向へ 1，y 軸方向へ -3 平行移動したものとして描くことができます。また軸の方程式は $x=1$，頂点の座標は $(1,\ -3)$ です。

次にいくつかの２次関数の式を変形してみせましょう。例のすぐ後に説明を与えるので，ひとまずはそれを見ずに，これらをどのような手順で変形しているのか，自分なりに言葉にしてみてください。

例　(1)　$y=x^2+6x$ の変形

$$\begin{aligned} y &= x^2+6x+9-9 \\ &= (x+3)^2-9 \end{aligned}$$

(2)　$y=-3x^2+6x-11$ の変形

$$\begin{aligned} y &= -3(x^2-2x)-11 \\ &= -3(x^2-2x+1-1)-11 \\ &= -3(x-1)^2-8 \end{aligned}$$

(3)　$y=2x^2+3x+1$ の変形

$$\begin{aligned} y &= 2\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)+1 \\ &= 2\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\right)+1 \\ &= 2\left\{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right\}+1 \\ &= 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8} \end{aligned}$$

(例終)

上の三つ (その上の例も含めれば四つ) に共通する変形のやり方を説明しましょう。これらは次のような手順でなされています。

1. x^2 の係数ではじめの２項を括る (こういうと上の例の (1) が例外になっているように見えます。しかし (1) の x^2 の係数は１ですから，ここでは１で括ったと考えれば他の場合とも 平仄(ひょうそく) はあいます)。
2. 次に括弧の中に平方の因数分解の公式が使えるように適当な数を加える。もちろんそのときに式として等しくなるように，加えた分だけ引き去っておく。

3. 平方の因数分解の公式を適用し，引いた数は括弧の外に出す。
4. 括弧の外にある数の計算をし，形を整える。

このように説明されれば納得できると思いますが，いざ自分で変形しようと試みたとき，すぐにできるでしょうか？

上の四つの手順のうち，１，３，４はそんなに難しくありません。実際変形のときに用いる数が目の前に現れているからです。

しかし２はどうでしょう？

平方の因数分解の公式 $x^2+2px+p^2=(x+p)^2$ を使いたいのですが，今の場合いずれも x^2+2px に相当する部分はあるものの，p^2 に相当する部分は自分で見つけなければいけません。みなさんは簡単に見つけられますか？

簡単に見つけられるという人は，以下の説明を飛ばして一般論へと進んでください (その前にこの解説の後にある問をやって，自分の考えが正しいことを納得するとともに自信をつけてほしい)。

さて上で触れたように，平方の因数分解の公式を使うのに適切な数を見つける必要がありますそれにはどうすればいいでしょう？

上の例の (１) の場合が簡単でしょうから，それで説明しましょう。

さて (１) の式は x^2+6x でした。これを $(x+p)^2$ の形に変形したい。そのためにはどのような数があればいいでしょう。

それを見つけるために $(x+p)^2$ を展開してみましょう。すると

$$(x+p)^2 = x^2+2px+p^2$$

となります。今の場合，この右辺のはじめの２項が x^2+6x となっているわけです。

で，我々は p^2 に相当する数を探しているのですが，これは上の二つの式 $x^2+2px+p^2$ と x^2+6x をよく見比べると簡単に見つけられることが分かります。

実際 x^2+2px に相当するところが x^2+6x なのですから，$x^2+2px=x^2+6x$。第２章「整式の基礎」でやった「係数比較の方法」によれば，$2p=6$。つまり $p=3$。これを２乗して９を得ます。つまり p^2 に相当する数は９である，と結論できるわけであり，このようにして先の例では９という数を見つけてきたのでした。

(２)，(３) も同様です。

実際 (２) の場合には x の係数が -2 ですから，$2p=-2$。つまり $p=-1$。よって $p^2=(-1)^2=1$。

(３) はちょっと戸惑うかもしれませんが，機械的に適用すればよく，x の係数を比較して $2p=\dfrac{3}{2}$。つまり $p=\dfrac{3}{4}$。よって $p^2=\dfrac{9}{16}$ となります。

一々式で書くのは面倒ですから，言葉にしておくと，結局「x の係数を２で割って２乗すればよい」わけです。

このようにしていつでも加えるべき数が簡単に分かるのです。

この結果も含めて先の手順をまとめるなら，

(1) x^2 の係数ではじめの２項を括る。

(2) x の係数を２で割って２乗した数を加え，式として等しくするために同じ数を引く。
(3) 平方の因数分解の公式を適用してはじめの三つの項を因数分解し，上で引いた数は括弧の外に出す(１のところで括った数をかけることを忘れないように！)。
(4) 括弧の外にある数の計算をし，形を整える。

以上が理解できているかどうかを確かめてもらいましょう。

練習 113 次の２次関数を $y = a(x-p)^2 + q$ の形に変形せよ。
(1) $y = x^2 + 4x - 2$
(2) $y = -x^2 + 2x + 1$ (x^2 の係数は -1 である。)
(3) $y = 3x^2 - 12x + 1$
(4) $y = 2x^2 - 2x - 3$

さて，上にまとめた手順から，一般の２次関数の場合にもこのような変形が可能であることが容易に想像できると思います。以下でそれを示しましょう。

一般論なので，係数には文字を使います。それゆえ大分複雑なことをやっているように見えると思います。しかしながら変形の基本的な考え方は上にまとめた手順にまったく同じです。見掛けにだまされないように！

またもしこの式変形が余りにも難しいと感じられる人は，後にある定理まで飛ばしても構いません。しかし将来理工系に進もうと考えている人は，必ず自分でもできるようになるまで慣れておくように！

さて

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

式変形の話がかなり長くなってしまったので，元々何をやろうとしていたのか忘れてしまった人もいるかもしれませんね。本題に戻りましょう。

我々は一般の２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを描きたかったのでした。先の式変形より次の定理を得ます。

定理(２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ) $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは $y = ax^2$ のグラフを

$$x \text{ 軸方向へ } -\frac{b}{2a}, \qquad y \text{ 軸方向へ } -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

に平行移動することで描ける。

よって特に $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと $y = ax^2$ のグラフは合同である。
また

$$\text{軸の方程式は } x = -\frac{b}{2a}, \qquad \text{頂点の座標は } \left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

注意

(1) この定理の重要性は「$y = ax^2 + bx + c$ のグラフと $y = ax^2$ のグラフが合同である」こと，つまり２次関数のグラフは「放物線」になっていると主張していることにあります (ちなみにいずれの式も x^2 の係数が a であることに注意！) [16]。

(2) y 軸との交点の y 座標は $x = 0$ を代入すれば得られます。今の場合 $y = ax^2 + bx + c$ の定数項である c がそれになります。よってグラフは y 軸と $(0,\ c)$ で交わっています。つまりグラフと y 軸との交点は式を見ただけで分かる，わけです。これは１次関数の y 切片のときと同じです[17]。

(注意終)

さあこれで一般の２次関数のグラフを描くことができるようになりました。この節も大分長くなってしまいましたが，最後にまとめとして一般の２次関数のグラフの描き方を例題として取り上げましょう。

例題 32 ２次関数 $y = 2x^2 + 4x + 4$ のグラフを描け。
また頂点の座標，軸の方程式もいえ。

解説　まずは与えられた２次関数の式を $y = a(x - p)^2 + q$ の形に変形します。それによって何をどれだけ平行移動すればよいのか分かるので，そのデータを元にグラフを描きます。

解答例　$y = 2x^2 + 4x + 4$ を変形すると，

$$\begin{aligned} y &= 2(x^2 + 2x) + 4 \\ &= 2(x^2 + 2x + 1 - 1) + 4 \\ &= 2(x + 1)^2 + 2 \end{aligned}$$

よってグラフは $y = 2x^2$ を x 軸方向へ -1，y 軸方向へ 2 平行移動したものである。ゆえにグラフは下のようになる。
また頂点の座標は $(-1,\ 2)$，軸の方程式は $x = -1$ である。

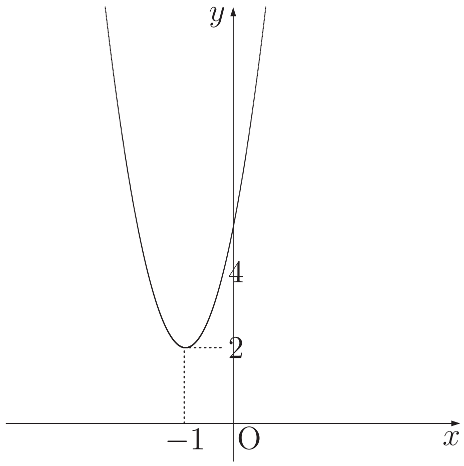
(解答例終)

練習 114 次の２次関数のグラフを描け。

(1) $y = x^2 + 4x - 2$　　(2) $y = -x^2 + 2x + 1$
(3) $y = 3x^2 - 12x + 1$　　(4) $y = 2x^2 - 2x - 3$

[16] 実はどの放物線も「相似」であることが知られています。つまり $y = ax^2$ のグラフと $y = bx^2$ のグラフは相似です。これについては，後の章で証明します。

[17] しかしながら２次関数の場合には y 切片とは**呼びません**。



12.2　平行移動

ここで２次関数から話題がちょっとずれますが，座標平面での図形の平行移動の方法について少し触れておくことにします。

さて定理「２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ」によって，２次関数のグラフは $y = ax^2$ のグラフを平行移動することによって描けることが分かりました。

これは次のように言い換えることもできます。

定理 ($y = ax^2$ のグラフと $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ)　関数 $y = ax^2$ のグラフを x 軸方向へ p，y 軸方向へ q 平行移動すると，関数 $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフになる。

上の定理は２次関数のものですが，これはもう少し一般化できます。

定理 ($y = f(x)$ のグラフの平行移動)　関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向へ p，y 軸方向へ q 平行移動すると，関数 $y = f(x-p) + q$ のグラフになる。

注意　証明は後の章で与えます。　**(注意終)**

この定理は上の定理の「$y = ax^2$」の部分を「$y = f(x)$」と書き換えたに過ぎないのですが，上の定理と同じく成り立っています。また $y = a(x-p)^2 + q$ が $y = f(x-p) + q$ となっていることにも注意！

この定理の一般性は，元になる関数のグラフが何であってもよい，というところにあります。例を挙げましょう。

例　関数 $y = 2x^2 + 3x - 1$ のグラフを x 軸方向へ１，y 軸方向へ２平行移動したときのグラフの式を求めましょう。定理の $y = f(x)$ が $y = 2x^2 + 3x - 1$ ですから

$y=f(x-p)$ は $y=2(x-1)^2+3(x-1)-1+2$ となります。これを整理することで $y=2x^2-x$ のグラフになることが結論できます。 **(例終)**

練習 115 関数 $y=x^2+2x+2$ のグラフを以下のように平行移動したらどのような関数のグラフになるか。
(1) x 軸方向へ -1 (y 軸方向へは 0 平行移動したと考えよ)
(2) y 軸方向へ 1
(3) x 軸方向へ -2，y 軸方向へ 1
(4) x 軸方向へ -1，y 軸方向へ -1

注意
(1) 上の例は 2 次関数でやってみせたが，1 次関数でもよいし，もっと一般に n 次関数でもよい。
(2) 実は次の定理も成り立っている。

定理 (点の平行移動) 点 $(a,\ b)$ を x 軸方向へ p，y 軸方向へ q 平行移動すると $(a+p,\ b+q)$ に移る。

これより元の 2 次関数のグラフの頂点の座標から，移動後のグラフの頂点の座標を簡単に計算することができる。
この定理が成り立っていることを上の問で確認せよ。
(3) 実は定理「$y=f(x)$ のグラフの平行移動」はさらに一般化できる。その際には次のような形に変えておいた方が理解しやすい。

定理 ($y=f(x)$ のグラフの平行移動) 方程式 $y=f(x)$ で定まる図形を x 軸方向へ p，y 軸方向へ q 平行移動すると，方程式 $y-q=f(x-p)$ で定まる図形になる[18]。

このような形に書き換えておくことのメリットの一つは，ここからさらに一般化することが容易であることにあるが，今一つメリットがある。それは，$y=a(x-p)^2+q$ の形から平行移動する量を読み取るときには，257 ページの注意で 触れたような注意が必要だったのだが，この形ならいずれも符号がマイナスになっているので気を使う必要がなくなってしまう，ということである。
また平行移動した後の式を求めるにしても，元の式 $y=f(x)$ の x に $x-p$ を，y に $y-q$ を代入すればよいことになるので，定理を覚えやすくなるのである。

(注意終)

12.3 2 次関数の決定

さて，グラフに関することは一段落とし，少しずつ 2 次関数のもつ性質を調べていくことにしましょう。その第一弾として，どのような条件があれば 2 次関数は決まるのか，そこからはじめましょう。

[18] これは定理「$y=f(x)$ のグラフの平行移動」の q を移項しただけです。また「関数 $y=f(x)$ 」が「方程式 $y=f(x)$ 」と書き換えられていることにも注意。

これについては同じような問題を１次関数の場合にやっています。その際に決めなければならない関数は１次関数であることが前提になっていました。今の場合も同様で，決定しようとしている関数は２次関数であることが分かっているものとして話を進めます。

さてそうすると，これも１次関数の場合と同様で，決めなければならないのは２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の係数 $a,\ b,\ c$ です。これらはどのような条件があると一つに定まってしまうのでしょうか。

この節ではこのような問題を扱いましょう。

12.3.1　頂点や軸に関する条件が与えられたとき

例題 33　頂点の座標が $(-1,\ 1)$ で，点 $(1,\ 5)$ を通るという条件を満たすグラフを持つ２次関数を求めよ。

解説　この例題のように，頂点の座標が与えられているような場合には関数の式を求めることができます。

で，１次関数の場合には「求める関数を $y = ax + b$ とする」として，満たすべき条件をこの式に代入し，係数 $a,\ b$ についての方程式を作り，それを解くことで解決しました。

２次関数の場合も同様にすればよいのですが，今の場合「求める関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする」としてはじめるとかなり面倒なことになります。実際与えられている条件は頂点に関するものなので，このような一般形を使うよりも，先の節で得た結論「どんな２次関数も $y = a(x-p)^2 + q$ の形に変形できる」ということを使った方が計算しやすいのです。なぜなら，ここに出てきた $p,\ q$ は求めようとしている２次関数の頂点の座標になっていたからです。

よって求めようとしている式はすぐに $y = a(x+1)^2 + 1$ という形をしていることが分かってしまいます。あとはもう一つの条件「グラフが $(1,\ 5)$ を通る」を使って a を求めればよい。これについては解答例を見れば理解できるでしょう。

解答例　求める式は $y = a(x+1)^2 + 1$ と書ける。

グラフが $(1,\ 5)$ を通るので

$$5 = a(1+1)^2 + 1$$

つまり

$$5 = 4a + 1$$

を満たす。これを解いて $a = 1$。

よって求める２次関数は $y = (x+1)^2 + 1$。ゆえに，

$$y = x^2 + 2x + 2 \ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

例題 34 直線 $x=1$ が対称軸で，２点 $(0,\ 3)$, $(4,\ -5)$ を通るグラフを持つ２次関数を求めよ。

解説　もう一つ $y=a(x-p)^2+q$ という形を使う問題をやりましょう。

この問題では軸の方程式が与えられています。よって上の形でいうと p の値が分かっていることになり，求める式は $y=a(x-1)^2+q$ とおくことができます。残りの二つの文字 $a,\ q$ はグラフが「２点 $(0,\ 3)$, $(4,\ -5)$ を通る」という条件から連立方程式を作ることができるので，容易に求めることができます。

解答例　軸が $x=1$ なので，求める式は $y=a(x-1)^2+q$ と書ける。

また２点 $(0,\ 3)$, $(4,\ -5)$ を通るので，

$$\begin{cases} 3 &= a(0-1)^2+q \\ -5 &= a(4-1)^2+q \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} 3 &= a+q \\ -5 &= 9a+q \end{cases}$$

を得る。

これを解いて $a=-1,\ q=4$。ゆえに求める式は $y=-(x-1)^2+4$。よって

$$y=-x^2+2x+3 \ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 116 グラフが次の条件を満たす２次関数をそれぞれ求めよ。

(1) 頂点が $(1,\ 3)$ で，点 $(2,\ -1)$ を通る。

(2) 頂点が $(3,\ -2)$ で，y 軸との交点が $(0,\ 16)$。

(3) 軸の方程式が $x=-1$ で，２点 $(-1,\ -1)$, $(1,\ 7)$ を通る。

12.3.2　グラフ上の３点が与えられたとき

例題 35 グラフが３点 $(1,\ -1)$, $(-1,\ -5)$, $(0,\ -4)$ を通る２次関数を求めよ。

解説　この例題は先の節の解き方と違い，２次関数の一般形 $y=ax^2+bx+c$ を使って係数 $a,\ b,\ c$ を直接求めていきます。

しかし問題をよく眺(なが)めてください。三番目の条件は $(0,\ -4)$ を通るというものです。$y = ax^2 + bx + c$ のグラフと y 軸との交点の座標は $(0,\ c)$ でした!　これからすぐに定数 c の値が -4 であることが分かります。

よって求める関数ははじめから $y = ax^2 + bx - 4$ とおいてよいことになります。似たようなことを１次関数の場合にやっています。どこでやったか，前のページを繰ってみつけておいてください。

解答例　求める関数を $y = ax^2 + bx - 4$ とする。

これが２点 $(1,\ -1)$, $(-1,\ -5)$ を通るので，連立方程式

$$\begin{cases} -1 & = a + b - 4 \\ -5 & = a - b - 4 \end{cases}$$

を得る。これを解いて $a = 1,\ b = 2$。よって

$$y = x^2 + 2x - 4 \ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 117　グラフが３点 $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$, $(2,\ 3)$ を通る２次関数を求めよ。

例題 36　２次関数のグラフが３点 $(-1,\ -2)$, $(2,\ 1)$, $(3,\ -2)$ を通るとき，この２次関数を求めよ。

解説　上の例題では，グラフと y 軸の交点が与えられていたので，２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の定数項である c がすぐにわかりました。ここではもう少し一般的な状況の問題を考えましょう。

といってもやることは同様で，与えられた３点の座標を関数の式 $y = ax^2 + bx + c$ に代入することで，$a,\ b,\ c$ に関する連立方程式が得られます。これは３元連立１次方程式で，これを解けばよいわけです。このような連立方程式の解き方は，第８章「１次方程式の復習」の最後のところで解説した通りです。

今の場合は，c が簡単に消去できるので，一般の３元１次連立方程式を解くより少し楽ですね。

解答例　求める２次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする。$(-1,\ -2)$ を通るので，$x = -1,\ y = -2$ を代入すると，

$$-2 = a - b + c \ \cdots (1)$$

を得る。

さらに (2, 1), (3, −2) を通るので，同様にして

$$\begin{aligned} 1 &= 4a + 2b + c \cdots (2) \\ -2 &= 9a + 3b + c \cdots (3) \end{aligned}$$

を得る。

(1), (2), (3) を連立させて解くと，

$$a = -1,\ b = 2,\ c = 1$$

よって

$$y = -x^2 + 2x + 1 \ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 118 2 次関数のグラフが 3 点 (3, 2), (2, −6), (−1, 6) を通るとき，この 2 次関数を求めよ。

12.4 2 次関数の最大・最小

1 次関数のときと同じく，最大・最小問題を考えましょう。

本章の「はじめに」で述べたように，力学に関する問題において 2 次関数は自然に現れます。たとえば，

問題 高さ 15m のビルの屋上から初速度 20m/s でボールを真上に投げあげたとき，地面から最高何 m の地点まで到達するか？

という問題を解こうとするとき，投げ上げてからの経過時間 t と，高さとの関係が問題になりますが，t 秒後のボールの地面からの高さ y はほぼ $y = -5t^2 + 20t + 15$ と表されることが知られています[19]。ここに出てきた y は t に関する 2 次関数になっています。

12.4.1 2 次関数の最大・最小

まずは定義域の制限のない場合。グラフより次の定理を得ます。

定理（2 次関数の最大・最小） $y = ax^2 + bx + c$ を $y = a(x-p)^2 + q$ という形に変形しておく。このとき

(1) $a > 0$ のとき，

この 2 次関数は $x = p$ において最小値 q を取り，最大値は持たない。

[19] 厳密には $y = -4.9t^2 + 20t + 15$ です。詳細は物理の教科書や参考書を参照のこと。

(2) $a<0$ のとき，
この２次関数は $x=p$ において最大値 q を取り，最小値は持たない。

注意
(1) １次関数は定義域に制限がないと最大値も最小値も持たない (グラフで確認せよ！)。しかし２次関数はいずれか一方を必ず持ちます。
(2) 証明は与えませんが，結論を納得するには支障はないでしょう。実際，$a>0$ のときグラフは下に凸だから，頂点より下にはグラフは出てきません。そのときの y の値が最小値になっています。$a<0$ のときも同様です。

(注意終)

例　(１) ２次関数 $y=3x^2+12x$ は $y=3(x+2)^2-12$ と変形できるので，$x=-2$ のとき最小値 -12 を取る。また最大値はない。
(２) ２次関数 $y=-2x^2+4x-5$ は $y=-2(x-1)^2-3$ と変形できるので，$x=2$ のとき最大値 -3 を取る。最小値はもたない。 **(例終)**

練習 119 次の２次関数の最大値または最小値を求めよ。
(1) $y=x^2+2x+3$　　(2) $y=-2x^2+12x-4$
(3) $y=x^2+x-1$　　(4) $y=-\dfrac{1}{3}x^2-2x+1$

12.4.2　限られた範囲での最大・最小

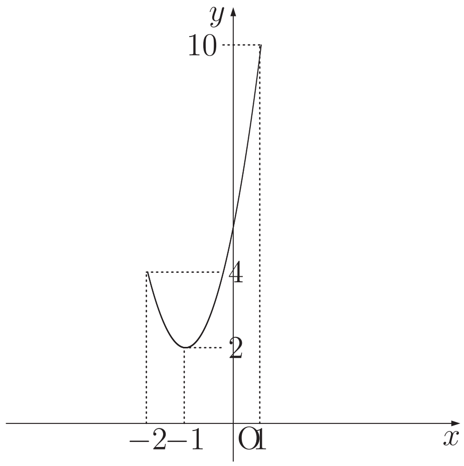
１次関数の場合と同様に，実際的な問題を考えるときには独立変数はある範囲に限られて変化するのが普通です。これを **定義域** といいました。
このような場合の最大値と最小値について説明しましょう。

例題 37 ２次関数 $y=2x^2+4x+4\ (-2 \leqq x \leqq 1)$ の最大値と最小値を求めよ。

解説　１次関数の場合にはグラフを描き，それを見ながら最大値と最小値を求めていきました。２次関数の場合も同様です。

解答例　与えられた関数は $y=2(x+1)^2+2\ (-2 \leqq x \leqq 1)$ と変形できるので，そのグラフは図のようになる。よって
$x=-1$ のとき最小値 2
$x=1$ のとき最大値 10

$x=-1$ のとき最小値 2，$x=1$ のとき最大値 10 $\cdots$**(答)**



(解答例終)

注意　1次関数のときは定義域の両端で最大値あるいは最小値を取りました。しかし2次関数のときはそうとは限りません(もちろん両端で最大値や最小値をとることもありますが)。

また定義域の状態によっては最大値や最小値がないこともあります。次の練習の結果をよく見てください。 **(注意終)**

練習 120 次の2次関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y = x^2 - 4x + 2 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$

(2) $y = -2x^2 - 4x - 3 \quad (1 \leqq x \leqq 4)$

(3) $y = 3x^2 - 6x - 1 \quad (-1 < x \leqq 2)$

(4) $y = -x^2 + 3x - 1 \quad (-2 < x < 1)$

12.5 最大・最小の応用

最大・最小の応用例として，一つ例題を紹介しましょう。

例題 38 周の長さが 28cm の長方形のなかで面積が最も大きいものの縦と横の長さを求めよ。またそのときの面積はいくらか。

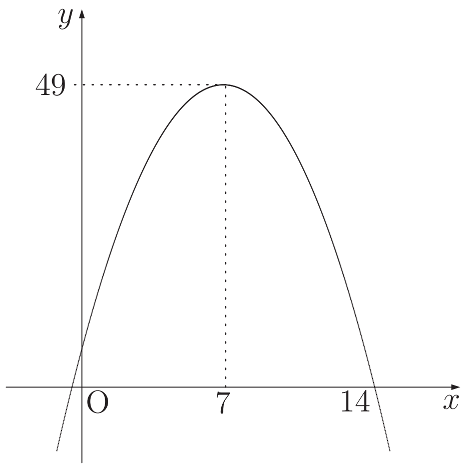
解説　縦の長さを x cm とすると，横の長さは $(14 - x)$ cm です。よって面積 S は $S = x(14 - x)$ で計算できます。つまり S は x の2次関数になっています。よってこの関数のグラフを描き最大値を求めればよいことになります。

しかしちょっと待ってください。変数 x はどんな値でもよいというわけではありません。実際縦も横も長さなのですから正の値しかとりえないのです。よって $0 < x$ かつ $14 - x > 0$。つまり $0 < x$ かつ $x < 14$。ゆえに $0 < x < 14$。

解答例　縦の長さを x cm とすると，横の長さは $(14-x)$ cm である。
辺の長さは正の数なので $0<x$ かつ $14-x>0$。すなわち $0<x<14$。
一方面積 S は $S=x(14-x)$ であるから，

$$\begin{aligned} S &= x(14-x) \\ &= -x^2+14x \\ &= -(x-7)^2+49 \end{aligned}$$

よってグラフは次の図のようになる。



よって $0<x<14$ において，$x=7$ のとき最大値 49 をとる。このとき横の長さは 7cm。
ゆえに

面積が最大になるのは縦 7cm，横 7cm のときで，
そのときの面積は 49cm ^{2} $\cdots$ **(答)**

(解答例終)

練習 121 直角をはさむ二辺の和が 12cm の直角三角形で，その面積が最大になるのはどんな場合か。

12.6　さらに勉強するために

この章も大分長くなりました。内容的は一段落になるので，ここでいったん切ることにしましょう。
この章は意識的に１次関数の場合と同じような展開をしてみましたが，どうだったでしょう?　１次関数にくらべ大分複雑だったので，類似を意識することがすこ

し難しかったかもしれませんね。しかし2次関数は適当に複雑な関数なので，関数の扱い方に慣れるにはよい場所でしょう。これから後の章で，2次関数に関するさらなる性質を紹介していくとともに，より複雑な関数も紹介し，使いこなせるようになってもらおうと思います。

第11章「1次関数の復習」の「はじめに」にも書いたように，関数山脈へはこれからが本格的な登山となります。

次章では2次関数の応用という面から2次不等式の解き方を解説します。ここにも2次方程式が関係していることに注意しましょう。そこまでの内容が，これから，関数・方程式・不等式の三つが絡み合うテーマの一つの雛型となります。