

第14章 平面図形の性質

14.0 はじめに

本章は中学校で学習した図形の性質の続きです。また、次章の「三角比」で使われるいくつかの定理の紹介も兼ねています。

本章の前半は、「三角形の五心」と呼ばれる五種類の点について紹介します。このうち外心、内心および重心の三つは、中学校で既に学習済みです。復習と証明の読み方に慣れることを兼ねて、きちんとフォローしておいてください。

本章の後半は「円の性質」です。

ギリシャ人が「最も美しい図形」と呼んだのが円でした。その理由は、円が様々な美しい性質を持っているからでもあります。本章ではわずかしか紹介しませんが、よく味わってみてください。また、ここで紹介する「円周角の定理」が次章の「三角比」で使われます。

本章は定理と証明のオンパレードになりました。

数学の他の分野と異なり、図形に関する性質は実際に図を描いて状況を確認しながら証明を読んだり、考えたりすることができます。図を見ながら、あるいは図のないものには自分で図を描きながら、証明が正しいことを確かめつつ、じっくりと読んでください。

また、みなさんに証明の考え方や書き方を身につけてほしいという願いから、練習には証明問題を多く採り入れました。ぜひチャレンジしてください。

中学校のときに学習したいくつかの定理は断らずに使っています。忘れてしまった人は、中学校の教科書を脇において、使われている定理を確認しながら証明を読んでほしいと思います。

14.1 三角形の五心

三角形には特徴的な五つの点があります。「外心」「内心」「重心」「垂心」「傍心」の五つです。

これらのうち「外心」「内心」「重心」は中学校で学習しました。ここではその復習も含めて、五つ全部を紹介します。

14.1.1 外心

まずは「外心」です。次の定理が成り立ちます。

定理 (三角形の辺の垂直二等分線) ABC の各辺の垂直二等分線は一点で交わる。またこの交点から各頂点までの距離は等しい。

すなわち、交点を O とすると、

$$OA = OB = OC$$

定義 (外心) 上の定理中の点 O を三角形の 外心 という。

(定義終) 外心

注意 なぜ O を「外心」というのでしょうか。上の定理に記したように、

$$OA = OB = OC$$

が成り立っています。つまり、 O を中心とし、半径 OA の円を描けば、この円は残りの頂点 B および C を通ります。言い替えれば、このようにして描いた円は ABC の「外接円」であり、 O はその中心になっています。

(注意終) 外接円

以下に、この定理の証明を与えましょう。

証明 ABC の辺 AB , AC の垂直二等分線の交点を O とし、 O から辺 BC に垂線を下ろす。各点の名前を図 14.1 のように定めよう。

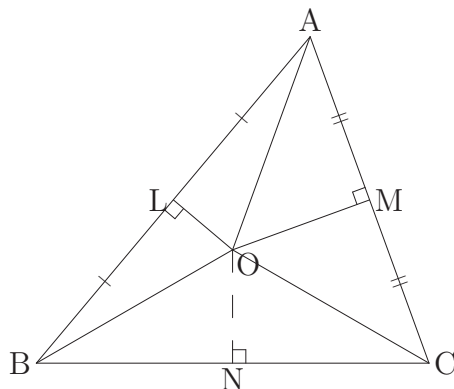


図 14.1: 外心

作図の仕方から、

$$AL=BL, \quad AM=CM, \quad \angle ALO = \angle BLO = \angle AMO = \angle CMO = 90^\circ$$

である。

また、

$$\angle CNO = \angle BNO = 90^\circ$$

証明したいことは、 $BN=CN$ である¹。

さて、 $\triangle ALO$ と $\triangle BLO$ で、

$$\begin{aligned} AL &= BL \quad (\text{仮定}) \\ \angle ALO &= \angle BLO \quad (\text{仮定}) \\ OL &= OL \quad (\text{共通}) \end{aligned}$$

よって

$$\triangle ALO \cong \triangle BLO \quad (\text{二辺とその間の角})$$

ゆえに

$$OA = OB$$

$\triangle AMO$ と $\triangle CMO$ について、同様の議論をすることで、

$$OA = OC$$

を得る。

次に $\triangle BNO$ と $\triangle CNO$ で、まずこれらは直角三角形であることに注意し、さらに

$$OA = OB, \quad OA = OC$$

より

$$OB = OC$$

を得る。また

$$ON = ON \quad (\text{共通})$$

より

$$\triangle BNO \cong \triangle CNO \quad (\text{斜辺と他の1辺})$$

よって

$$BN = CN$$

(証明終)

問 73 直角三角形の外心はどこにくるか、調べよ。

¹定理自体は「3本の垂直二等分線が1点で交わる」であるが、これをそのまま証明することは難しい。そこで、まず2本の垂直二等分線を考え、その交点を3番目の垂直二等分線が通ることを示そう、というのがこの証明の方針です。

14.1.2 内心

定理 (三角形の角の二等分線) ABC の各頂角の二等分線は一点で交わる。またこの交点から各辺までの距離は等しい。

すなわち、交点を I とし、各辺に下ろした垂線の足² をそれぞれ L, M, N とすると、

$$IL = IM = IN$$

定義 (内心) 上の定理中の点 I を三角形の 内心 という。 (定義終) 内心

注意 I を内心と呼ぶのは、 I を中心、半径 IL の円を描くと、三角形に内接します。つまりこの円は「内接円」になっているからです。 (注意終) 内接円

証明は外心の場合と似ているので、概略を示すにとどめましょう。ぜひ、きちんと書き下してみてください。

また、図もわざとかかないことにするので、私がどのような設定をしているのかを、実際に描きながら下の証明を読んでみてください。

証明 ABC の A, B の二等分線の交点を I とする。 I から辺 AB, BC, CA に下ろした垂線の足を、それぞれ L, M, N とする。

AIL と AIN は直角三角形で、斜辺と他の一鋭角が等しいので合同である。よって $IL=IN$ 。

BIL と BIM についても同様なので、 $IL=IM$ 。

ゆえに $IM=IN$ 。

次に CIM と CIN について考えると、斜辺と他の一辺が等しいので合同。

よって $ICM=ICN$ 。つまり IC は C の二等分線になっている。(証明終)

練習 131 ABC の内心を I とするとき、

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$$

練習 132 ABC の内心 I を通り、辺 BC に平行な直線と辺 AB, AC との交点をそれぞれ D, E とするとき、

$$DE = DB + CE$$

となることを証明せよ。

練習 133 内心と外心が一致する三角形は正三角形であることを証明せよ。

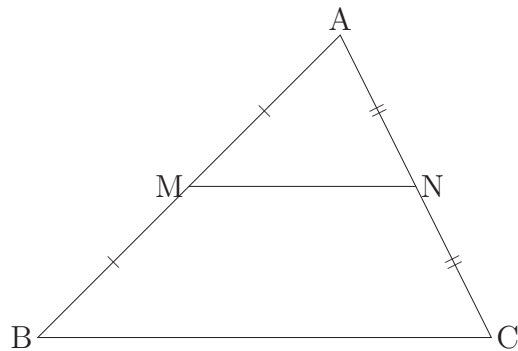
²与えられた点から下ろした垂線と、与えられた直線の交点を 垂線の足 といいます。

14.1.3 重心

準備として次の定理を証明しておきます。

定理 (中点連結定理) ABC の辺 AB, AC の中点をそれぞれ M, N とすると,

$$MN \parallel BC, \quad MN = \frac{1}{2} BC$$



証明 ABC と AMN で,

$$\begin{aligned} AB : AM &= AC : AN = 2 : 1 \\ \angle BAC &= \angle MAN \quad (\text{共通}) \end{aligned}$$

よって

$$\triangle ABC \sim \triangle AMN \quad (\text{二辺の比とその間の角})$$

ゆえに

$$\angle ABC = \angle AMN$$

よって

$$MN \parallel BC$$

また, 相似比が $2 : 1$ なので

$$BC : MN = 2 : 1$$

よって

$$MN = \frac{1}{2} BC$$

(証明終)

定理 (三角形の中線) ABC の3本の中線は一点で交わる。また, この交点は中線を $2 : 1$ に内分する。

すなわち，3本の中線を AM, BN, CL とし，この交点を G とすると，

$$AG : GM = BG : GN = CG : GL = 2 : 1$$

定義 (重心) 上の定理中の点 G を三角形の **重心** という。

(定義終) 重心

証明 AM を延長し， $GP=AG$ となるように，点 P をとる。このとき G は AP の中点になっている。

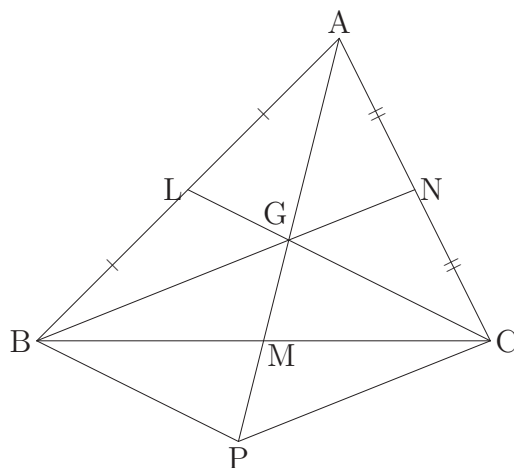


図 14.2: 重心

ABP に中点連結定理を適用すると，

$$BP \parallel LG, LG = \frac{1}{2} BP$$

特に

$$BP \parallel CG$$

ACP について同様にすると，

$$CP \parallel BG$$

を得る。

よって四角形 $BPCG$ は平行四辺形。

平行四辺形の対角線は互いに他を二等分するので，

$$BM = CM, GM = PM$$

前者より， M は辺 BC の中点。すなわち AM は中線。

また， $AG=GP$ だったので，後者と合わせると

$$AG : GM = 2 : 1$$

がわかる。

さらに，

$$LG = \frac{1}{2} BP$$

であり， $BP=CG$ なので，

$$CG : LG = 2 : 1$$

同様にして

$$BG : NG = 2 : 1$$

(証明終)

練習 134 ABC の辺 AB ， AC 上にそれぞれ点 F ， E をとり， BE と CF の交点を G とする。 $2GE=GB$ ， $2GF=GC$ が成り立つとき， G は ABC の重心であることを証明せよ。(ヒント： BG ， CG の中点を考えよ。)

14.1.4 垂心

定理 (三角形の垂線) 三角形の三つの頂点から対辺に下ろした垂線は一点で交わる。

定義 (垂心) 上の定理中の交点を 垂心 という。

(定義終) 垂心

証明 ABC の頂点 A から辺 BC に下ろした垂線と，頂点 B から辺 AC に下ろした垂線の交点を H とする。

また，点 A を通り辺 BC に平行な直線，点 B を通り辺 AC に平行な直線，点 C を通り辺 AB に平行な直線を引く。

そして図 14.3 のように記号を定めよう。

$BC \parallel PR$ なので，特に $BC \parallel AR$ 。

同様にして $AB \parallel CR$ 。

よって四角形 $ABCR$ は平行四辺形。ゆえに， $AR=BC$ 。

同様にして $BC=AP$ を得る。

よって A は PR の中点になっている。

また， AH と BC は垂直なので， AH と PR も垂直。

すなわち AH は PR の垂直二等分線になっている。

同様の議論によって BH は PQ の垂直二等分線であることが結論できる。

よって H は PQR の外心。ゆえに CH は QR の垂直二等分線。特に CH と QR は垂直。

一方 $AB \parallel QR$ であったから， CH は AB と垂直。

(証明終)

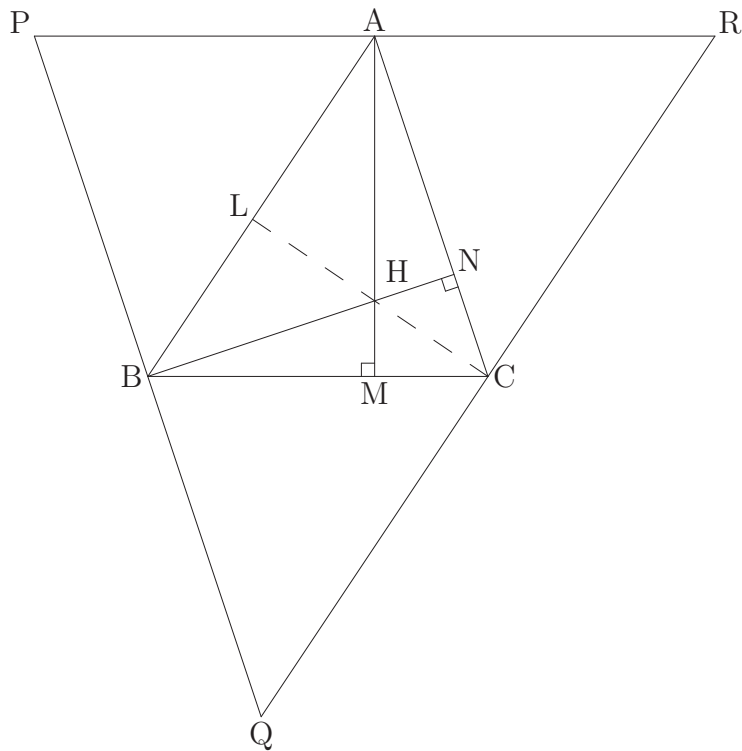


図 14.3: 垂心

注意 後の章で、定理の座標を用いた別証を与えます。

(注意終)

問 74 正三角形の外心，内心，重心，垂心はどこにくるか。

問 75 一般の三角形で外心，内心，垂心を作図せよ。これら 3 点について，どんなことがいえそうか？

もし可能なら証明を与えよ。

14.1.5 傍心

定理 (三角形の内角と外角の二等分線) 三角形の一つの内角の二等分線と，残りの二角の外角の二等分線は一点で交わる。

また，この交点と各辺までの距離は等しい。

定義 (傍心) 定理中の交点を，三角形の傍心 という。

(定義終) 傍心

注意

(1) 定理の記述からわかるように，傍心は三つあります。

(2) 傍心を中心とし、一辺までの距離を半径とする円を描くと、辺およびその延長線上に接する。これが「傍心」という言葉の由来です。

(注意終)

問 76 以下図も省略し、証明も簡単に記す。それぞれの主張の論拠を推測し、証明を詳述せよ。

証明 ABC の A の二等分線と B の外角の二等分線の交点を P とする。

点 P から辺 BC に下ろした垂線の足を L 、辺 AB 、 AC の延長線上に下ろした垂線の足をそれぞれ M 、 N とする。

APM と APN は合同。よって $PM=PN$ 。

次に PBM と PBL は合同。よって $PL=PM$ 。

さらに PCL と PCN も合同。よって PC は C の外角の二等分線。

(証明終)

練習 135 ABC の内心を I 、その三つの傍心を D 、 E 、 F とするとき、 I は DEF の垂心であることを証明せよ。

14.2 円の性質

本節では、円の性質を紹介します。続く二つの節で、中学校で学習した円に関するいくつかの用語と性質を復習しましょう。

14.2.1 円に関する用語の復習

定義 (弦, 弧) 円周上の 2 点を結ぶ線分を 弦 という。

弦

また、円周上の 2 点で分けられた円のそれぞれの部分を 弧 という。 (定義終)

弧

注意 円周上の 2 点を A 、 B とするとき、弧を \widehat{AB} と表す。

図からわかるように、弧は二つある。そのため \widehat{AB} と書いただけではどちらを表すのかわからない。

長い方の弧を 優弧、短い方を 劣弧 といい、特に断らない限り劣弧を表すことが多い。

優弧

はっきりと示したいときには、指し示したい方の弧の途中にもう 1 点 C をとり、 \widehat{ACB} のように表す (図 14.5 参照)。

劣弧

(注意終)

定義 (中心角) 弧の両端を通る二つの半径が作る角を、その弧に対する 中心角

中心角

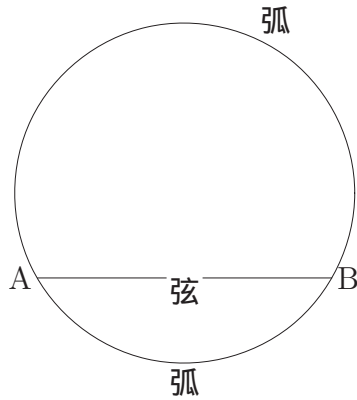


図 14.4: 弦, 弧

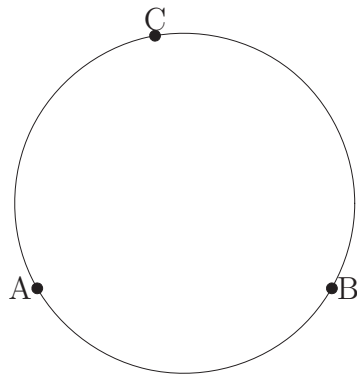


図 14.5: 弧の表し方

という。

つまり, $\angle AOB$ を \widehat{AB} に対する中心角という。

また, \widehat{AB} を 中心角 $\angle AOB$ に対する弧 という。

(定義終)

定義 (おうぎ形) 円上の二つの半径と弧で囲まれた図形を おうぎ形 という。

おうぎ形

このとき, $\angle AOB$ を おうぎ形 OAB の 中心角 という。

(定義終)

ついでに, 弧の長さや, おうぎ形の面積について復習しておきましょう。すぐ
に使うことはありませんので, 飛ばして先に進んでも構いません。

まず次の定理が成り立ちます。

定理 (弧の長さやおうぎ形と中心角) 弧の長さは, 中心角に比例する。

おうぎ形の面積は, 中心角に比例する。

これから次のことがわかります。

系 (等しい中心角の弧) 一つの円で, 等しい中心角に対する弧の長さは等しい。

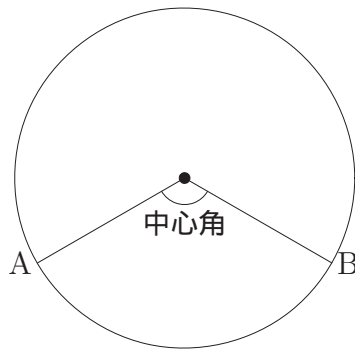


図 14.6: 中心角

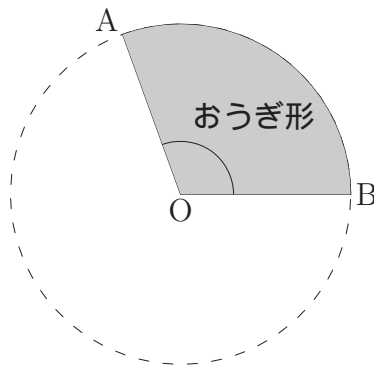


図 14.7: おうぎ形

逆に，等しい長さの弧に対する中心角は等しい。

定理 (弧と弦) 一つの円で，等しい長さの弧に対する弦の長さは等しい。

逆に，等しい長さを持つ弦に対する弧の長さは等しい。

証明 上の系より，等しい長さの弧に対する中心角は等しい。さらに中心角が等しければ弦の長さは等しい。よって，等しい長さの弧に対する弦の長さは等しい。

逆に，弦の長さが等しければ，それに対する中心角は等しく，さらに等しい中心角に対する弧の長さは等しい。よって，等しい長さを持つ弦に対する弧の長さは等しい。
(証明終)

また次の次の公式も得られます。

定理 (弧の長さ，おうぎ形の面積) 半径 r ，中心角 x° の弧の長さ l は，

$$l = 2\pi r \times \frac{x}{360}$$

また同様のおうぎ形の面積 S は、

$$S = \pi r^2 \times \frac{x}{360}$$

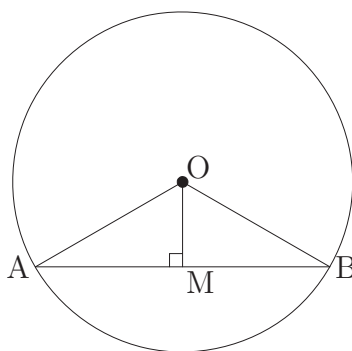
14.2.2 弦の性質

弦については次のような性質が成り立ちました。

定理 (弦の性質) 円の中心から弦に引いた垂線は、その弦を二等分する。

逆に、弦の垂直二等分線は、円の中心を通る。

証明 円の中心 O から弦 AB に下ろした垂線の足を M とする。



このとき、 $\triangle OAM \cong \triangle OBM$ である。

実際、

$$\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ \quad (\text{仮定})$$

$$OA = OB \quad (\text{半径})$$

$$OM = OM \quad (\text{共通})$$

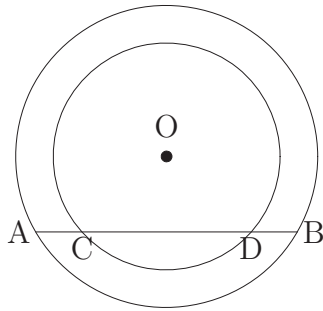
なので、直角三角形の合同条件「斜辺と他の1辺」が成り立っている。

よって、 $AM = BM$ 。

次に、弦 AB は二等辺三角形 OAB の底辺であるから、その中点である M で AB にひいた垂直二等分線は頂点 O を通る。よって、弦の垂直二等分線は円の中心を通る。 (証明終)

三角形の外心は、まさにこの定理の応用とっていいですね。

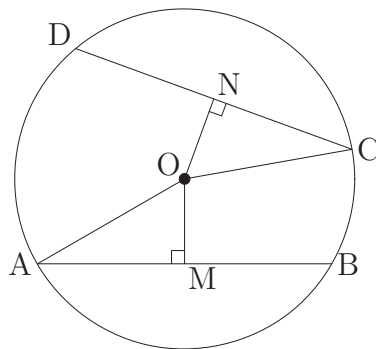
練習 136 図のように O を中心とする二つの同心円において、外側の円の弦 AB が、内側の円と C, D で交わっているとき、 $AC = BD$ であることを証明せよ。



定理 (中心から等距離にある弦) 一つの円で、中心から等しい距離にある弦の長さは等しい。

逆に、等しい長さの弦は、中心から等距離にある。

証明 中心 O から二つの弦 AB, CD に下ろした垂線の足をそれぞれ M, N とする。



OM=ON とする。 OAM と OCN は直角三角形であり、

$$\begin{aligned} OM &= ON \quad (\text{仮定}) \\ OA &= OC \quad (\text{いずれも半径}) \end{aligned}$$

よって、

$$OAM \equiv OCN \quad (\text{斜辺と他の1辺})$$

ゆえに

$$AM = CN$$

定理「弦の性質」より M, N はそれぞれ弦 AB, CD の中点なので、

$$AB = CD$$

つまり、中心から等しい距離にある弦の長さは等しい。

逆に弦の長さが等しいとする。 $\triangle OAM$ と $\triangle OCN$ において、これらは直角三角形であり、 $AB=CD$ より、 $AM=CN$ 。また、 $OA=OC$ (いずれも半径)。

$$\therefore \triangle OAM \cong \triangle OCN$$

ゆえに

$$OM = ON$$

つまり、長さの等しい弦は中心から等しい距離にある。

(証明終)

14.2.3 円の接線

円と直線の位置関係を考えると、

- (1) 共有点が2個
- (2) 共有点が1個
- (3) 共有点なし

の三つの場合が考えられました。

この中で、共有点が1個の場合に興味があります。

定義 (接線) 直線 l と円の周とが1点だけを共有するとき、 l はその円と接する
といい、直線 l を円の接線、共有する点を接点という。 (定義終)

接する
接線
接点

接線については次の定理が成り立ちます。

定理 (円の接線の性質) 円の接線は、接点を通る半径に垂直である。

逆に、円上の点を通る直線とその点を通る半径が垂直ならば、その直線はこの円の接線である。

この定理の証明は、ちょっと面倒なので後に回します。ひとまず信じて先に進みましょう。

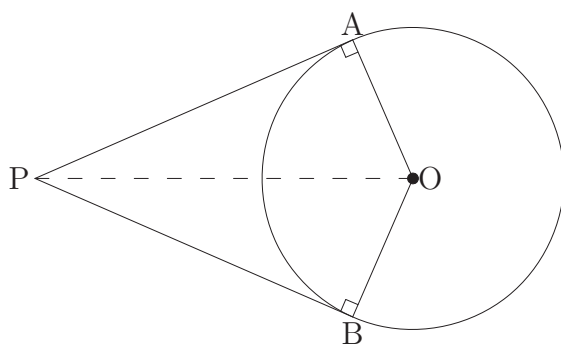
定理 (接線の長さ) 円外の1点から、その円にひいた二本の接線の長さは等しい。

証明 円 O の外にある点を P とし、 P から円 O にひいた二本の接線の接点を A 、 B とする。

$\triangle PAO$ と $\triangle PBO$ は直角三角形で、

$$PO=PO \quad (\text{共通})$$

$$OA=OB \quad (\text{半径})$$



より,

$$PAO \cong PBO \quad (\text{斜辺と他の1辺})$$

$$\therefore PA = PB$$

(証明終)

14.2.4 円周角の定理

以上で中学の復習は終わりです。円の性質をさらに紹介しましょう。

定義(円周角) 円の弧 AB の両端と, 残りの弧の上の点 P を結んでできる $\angle APB$ を, 弧 AB に対する 円周角 という。

円周角

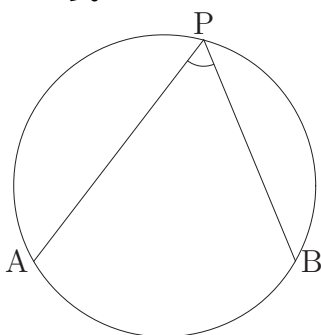


図 14.8: 円周角

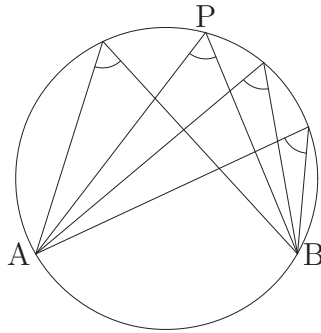
また, 弧 AB を円周角 APB に対する弧 という。

(定義終)

注意 弧 AB に対する円周角は, 点 P が弧の上の移動することによって, いくつも考えられます。

(注意終)

弧を一つ定め, 上の注意のように, いろいろな位置に P をとってみましょう。このとき, それぞれの角を測ってみてください。どんなことが成り立っているのでしょうか。



問 77 実際にいろいろな円周角を作り，角度を測ってみよ。

この測定から，弧を一つ定めた場合，どの円周角も等しくなっています。つまり，次のことが成り立っていると予想できます。

予想 一つの弧に対する円周角は等しい。

これが正しいかどうか，考えてみましょう。

弧を一つ定めて，その弧に対する円周角を直接比較するのはちょっと面倒です。実は次の定理が成り立っています。

定理 (円周角と中心角) 一つの弧に対する円周角は，その弧に対する中心角の半分に等しい。

証明 次の三つの場合が考えられる。

- (1) 中心 O が $\angle APB$ の辺上にある。
- (2) 中心 O が $\angle APB$ の内部にある。
- (3) 中心 O が $\angle APB$ の外部にある。

それぞれの場合について証明しよう。

- (1) 中心 O が $\angle APB$ の辺上にある場合

図 14.9 のように記号を定める。

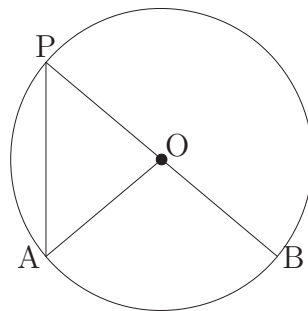


図 14.9: 中心 O が $\angle APB$ の辺上にある場合

このとき、 $\triangle OPA$ は二等辺三角形なので、 $\angle OPA = \angle OAP$ 。また、 $\angle BOA$ は $\triangle OPA$ の外角なので、

$$\angle OPA + \angle OPA = \angle BOA$$

よって、

$$2\angle OPA = \angle BOA$$

つまり

$$\angle OPA = \frac{1}{2}\angle BOA$$

なので、円周角は中心角の半分に等しい。

(2) 中心 O が $\angle APB$ の内部にある場合

図 14.10 のように記号を定める。

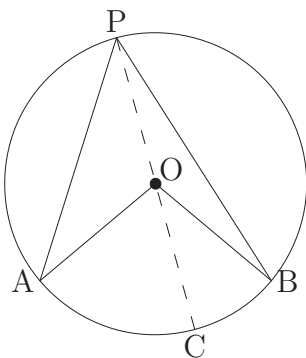


図 14.10: 中心 O が $\angle APB$ の内部にある場合

$\angle APC$ は弧 AC に対する円周角であり、 $\angle AOC$ はその中心角で、 O は PC 上にある。ゆえに (1) より、

$$\angle OPA = \frac{1}{2}\angle COA$$

同様にして、

$$\angle OPB = \frac{1}{2}\angle COB$$

よって、

$$\begin{aligned} \angle APB &= \angle OPA + \angle OPB \\ &= \frac{1}{2}\angle COA + \frac{1}{2}\angle COB \\ &= \frac{1}{2}(\angle COA + \angle COB) \\ &= \frac{1}{2}\angle AOB \end{aligned}$$

(3) 中心 O が $\angle APB$ の外部にある場合

問いにします。

(証明終)

問 78 「中心 O が $\angle APB$ の外部にある場合」の証明を与えよ。

系 (直径に対する円周角) 半円の弧に対する円周角は直角である。

証明 半円の弧の中心角は 90° なので、明らか。

(証明終)

この系は今後いろいろな場所で使われるでしょう。

練習 137 円 O の外部の点 P から円 O に接線をひくには、線分 OP を直径とする円と円 O の交点をもとめ、その交点と P を結べばよいことを証明せよ。

定理「円周角と中心角」より、予想が正しいことが証明できます。

系 (円周角の定理) 同じ弧に対する円周角は等しい。

円周角の定理

証明 図 14.11 のように記号を定める。

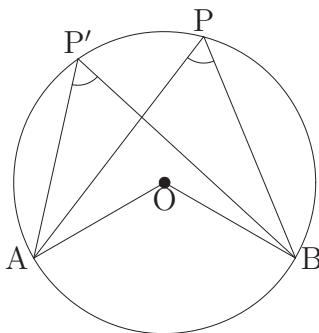


図 14.11: 円周角の定理

このとき、

$$\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB = \angle AP'B$$

(証明終)

実はもう少し一般的なことがいえます。

系 (円周角と弧) 一つの円で、等しい長さの弧に対する円周角は等しい。

逆に、等しい円周角に対する弧の長さは等しい。

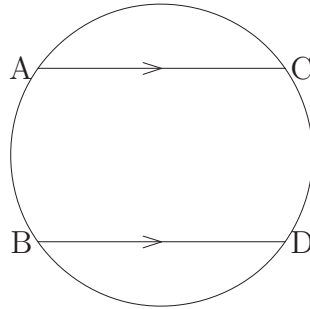
証明 定理「円周角」と弧に対する中心角と、その弧に対する円周角の中心角は等しいことから明らか。

(証明終)

練習 138 図で $AC \parallel BD$ のとき,

$$\widehat{AB} = \widehat{CD}$$

を証明せよ。



練習 139 上の練習の逆「 $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ならば, $AC \parallel BD$ 」は成り立つか。

練習 140 ABC の外心を O とし, 頂点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を D とする。このとき, 角 A の二等分線は, $\angle OAD$ も二等分する。これを証明せよ。

定理「円周角の定理」の応用として次の定理を証明しましょう。この定理の後半は「転換法」と呼ばれる方法で証明されます。ちょっと面白いのでよく見てください。

定理 (円と点の位置) A, B を一つの円上の点とする。

- (1) $\angle APB < \text{円周角} \iff P$ は円外にある。
- (2) $\angle APB = \text{円周角} \iff P$ は円上にある。
- (3) $\angle APB > \text{円周角} \iff P$ は円内にある。

証明 まず

- (1) $\angle APB < \text{円周角} \iff P$ は円外にある。
- (2) $\angle APB = \text{円周角} \iff P$ は円上にある。
- (3) $\angle APB > \text{円周角} \iff P$ は円内にある。

を証明しよう。

(1) P が円の外にあるとする。図 14.12 のように記号を定める。

このとき,

$$\angle AP'B = \angle PAP' + \angle APB$$

なので,

$$\angle AP'B > \angle APB$$

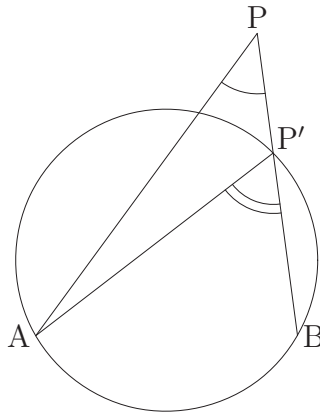


図 14.12: P が円の外部にある場合

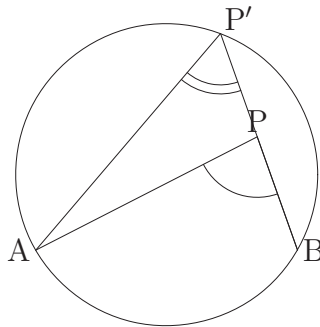


図 14.13: P が円の内部にある場合

$\angle AP'B$ が弧 AB の円周角であるから，主張が成り立つ。

(2) は円周角の定義である。

(3) P が円の内部にあるとする。図 14.13 のように記号を定める。

このとき，

$$\angle APB = \angle PAP' + \angle AP'B$$

なので，

$$\angle AP'B < \angle APB$$

$\angle AP'B$ が弧 AB の円周角であるから，主張が成り立つ。

次にそれぞれの逆である

(1) $\angle APB < \text{円周角} \implies P$ は円外にある。

(2) $\angle APB = \text{円周角} \implies P$ は円上にある。

(3) $\angle APB > \text{円周角} \implies P$ は円内にある。

を証明しよう。

(1) $\angle APB < \text{円周角}$ とする。

もし P が円の外部にないとする、 P は円上か、円の内部にある。もし円上にあれば、先に証明した (2) より、「 $\angle APB = \text{円周角}$ 」となり、仮定である「 $\angle APB < \text{円周角}$ 」に矛盾する。

またもし、円の内部にあるとすると、今度は (3) によって「 $\angle APB > \text{円周角}$ 」となり、これも仮定の「 $\angle APB < \text{円周角}$ 」に矛盾する。

よって、 P は円の外部にある。

残りも同様。

(証明終)

問 79 定理「円と点の位置」の後半

(1) $\angle APB < \text{円周角} \implies P$ は円外にある。

(2) $\angle APB = \text{円周角} \implies P$ は円上にある。

(3) $\angle APB > \text{円周角} \implies P$ は円内にある。

の (2) と (3) を証明せよ。

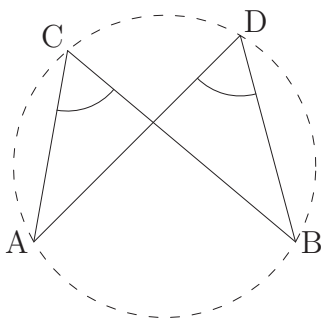
どうでしょう？ 納得できましたか？

一直線上にない三点を通る円は必ずありますが、四点を通る円は存在するときとそうでないときがあります。定理「円と点の位置」を用いることによって、これについての判定法である、次の定理が成り立つことがわかります。

定理 (同一円周上にある 4 点) 線分 AB の同じ側に 2 点 C, D があって、

$$\angle ACB = \angle ADB$$

が成り立てば、4 点 A, B, C, D は一つの円周上にある。



証明 点 D が A, B, C を通る円上にないとする。

このとき D はこの円の内部にあるか、あるいは外部にある。

内部にあれば、定理「円と点の位置」(3) より $\angle ACB < \angle ADB$ であり、仮定に矛盾。

D が外部にあれば、同定理の (1) より、 $\angle ACB < \angle ADB$ となり、これも仮定に矛盾。

よって、D は円周上にある。つまり 4 点 A, B, C, D は一つの円周上にある。
(証明終)

練習 141 ABC の頂点 B, C からそれぞれ対辺に垂線を引き、その足を D, E とする。このとき、4 点 B, C, D, E は一つの円周上にあることを証明せよ。

14.2.5 円と四角形

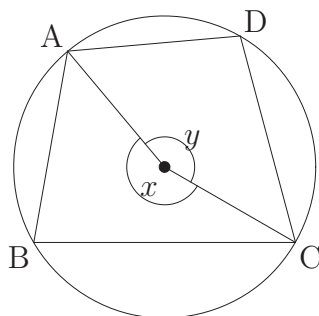
先にも説明しましたように、3 点を通る円は必ずありますが、4 点を通る円はあるとは限りません。この特殊な場合に興味があり、先の節で定理「同一円周上にある 4 点」を紹介しました。

これについては、いくつかの定理があります。それをこの節では紹介しましょう。

定理 (円に内接する四角形) 円に内接する四角形の向かい合う二つの角の和は、 180° である。

証明 図のような四角形を考える。

円 O の半径 OA, OC の作る角を $\angle x$, $\angle y$ とする。



定理「円周角の定理」より、

$$\angle B = \frac{1}{2}\angle x, \quad \angle D = \frac{1}{2}\angle y$$

であり、

$$\angle x + \angle y = 360^\circ$$

なので、

$$\angle B + \angle D = \frac{1}{2}(\angle x + \angle y) = 180^\circ$$

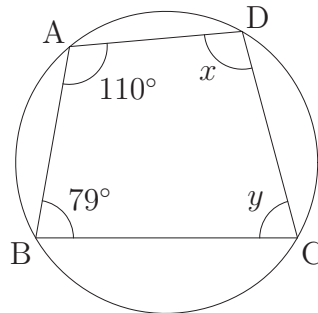
同様にして、

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

を得る。

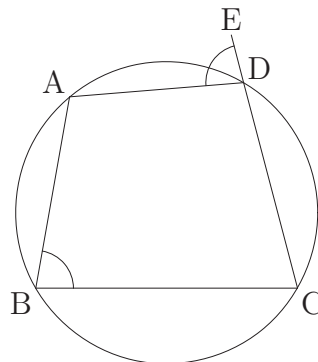
(証明終)

練習 142 図で $\angle x$, $\angle y$ を求めよ。



定理「円に内接する四角形」から次の定理がすぐに得られます。

定理 (円に内接する四角形の性質) 円に内接する四角形の一つの内角は、それに向かい合う内角の外角に等しい。



証明 定理「円に内接する四角形」から、

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

一方

$$\angle ADC + \angle ADE = 180^\circ$$

よって、

$$\angle ABC = \angle ADE$$

(証明終)

練習 143 AB を弦とする弓形の弧の midpoint を P とし、その弧の上の任意の点を C とする。このとき PC は $\angle ACB$ の外角を二等分することを証明せよ。

定理「円に内接する四角形」は逆も成り立ちます。

定理 (四角形が円に内接するための条件) 四角形の一組の向かい合う二つの角の和が 180° ならば、この四角形は円に内接する。

証明 四角形 ABCD で

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

とする。

今、3点 A, B, D を通る円を描き、対角線 BD について頂点 C と同じ側にある円周上に C 以外の点 C' をとると、定理「円に内接する四角形」より、

$$\angle A + \angle C' = 180^\circ$$

よって、

$$\angle C = \angle C'$$

ゆえに C もこの円周上にある。

(証明終)

練習 144 定理「円に内接する四角形の性質」の逆を述べ、証明せよ。

練習 145 ABC の三つの頂点からそれぞれ対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす。このとき ABC の垂心 H は DEF の内心であることを証明せよ。

14.2.6 接弦定理

円 O 上の点 A を通る直線 AT について、定理「円の接線の性質」は

$$AT \text{ が円 O の接線} \iff OA \perp AT$$

であることをいっていました。

この事実と、定理「円周角の定理」より次の定理が得られます。

定理 (接弦定理) 円の接線とその接点を通る弦との作る角は、その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。接弦定理

ちょっとわかりにくいですね。図を描きましょう。

図 14.14 のように記号を定めたとき、

$$\angle C = \angle BAT$$

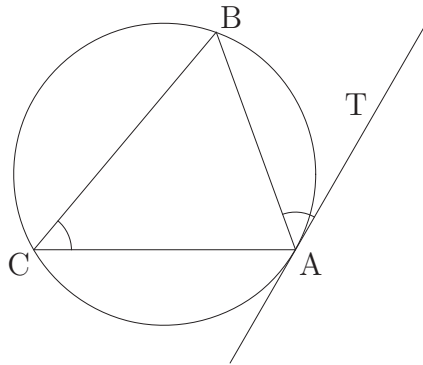


図 14.14: 接弦定理

である，というのが定理の主張です。

証明 $\angle BAT = \alpha$ とする。

$\alpha < 90^\circ$ の場合。

直線 AT は接線なので， $OA \perp AT$ 。

AC' を直径にとると， $\angle ABC' = 90^\circ$ 。

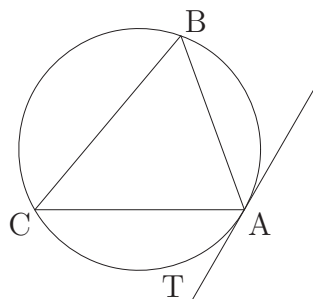
よって，

$$\begin{aligned} \angle C &= \angle C' \\ &= 90^\circ - \angle C'AB \\ &= \alpha \\ &= \angle BAT \end{aligned}$$

$\alpha = 90^\circ$ ， $\alpha > 90^\circ$ の場合は読者の演習とする。

(証明終)

練習 146 AB を円 O の弦，AT を A における接線で，C を \widehat{AB} の中点とする。このとき，AC は $\angle BAT$ を二等分することを証明せよ。



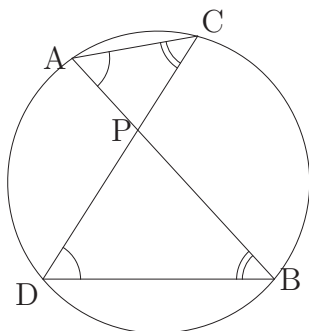
14.2.7 方べきの定理

定理 (方べきの定理) 定点 P を通る二直線が円 O とそれぞれ A, B, C, D と 方べきの定理
交わるとき,

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

である。

証明 P が円の内部にある場合。



A と C, B と D を結ぶと, $\triangle PAC$ と $\triangle PDB$ において

$$\angle PAC = \angle PDB \text{ (円周角)}$$

$$\angle PCA = \angle PBD \text{ (円周角)}$$

なので,

$$\triangle PAC \sim \triangle PDB \text{ (二角)}$$

よって,

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$$

ゆえに,

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

P が円の外部にある場合は, 読者の演習問題とする。 (証明終)

問 80 定理「方べきの定理」で, P が円の外部にある場合を証明せよ。(ヒント: 定理「円に内接する四角形の性質」を用いよ。)

練習 147 円の外部にある点 P を通る直線が円と A, B で交わり, P から円に引いた接線の接点が T であるとする。このとき,

$$PA \cdot PB = PT^2$$

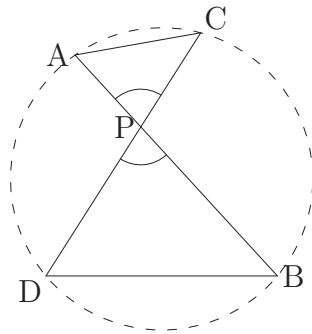
が成り立つことを証明せよ。

定理 (方べきの定理の逆) 二つの線分 AB , CD または AB の延長と CD の延長が点 P で交わり,

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

が成り立つならば, 4点 A, B, C, D は同一円周上にある。

証明 次の図のような場合。



$\triangle PAC$ と $\triangle PDB$ において,

$$\angle APC = \angle DPB \text{ (対頂角)}$$

また, 仮定の式 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ より,

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$$

ゆえに,

$$\triangle PAC \sim \triangle PDB \text{ (二辺の比とその間の角)}$$

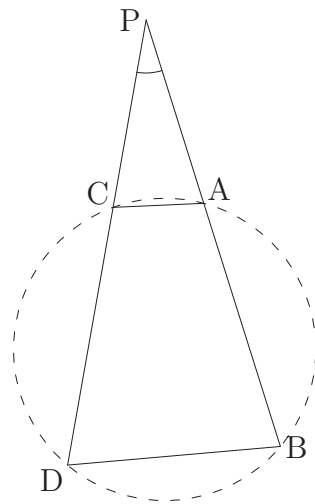
相似な図形の対応する角は等しいので,

$$\angle ACP = \angle DBP$$

定理「同一円周上にある4点」より, A, B, C, D は一つの円周上にある。

(証明終)

問 81 次の図のような場合にも, 定理「方べきの定理の逆」が成り立つことを証明せよ。(ヒント: どこに相似な三角形があるでしょう。)



14.3 さらに勉強するために

「はじめに」にも書きましたように，定理と証明のオンパレードになりました。ま，これが普通の数学書のスタイルなのですが。

20世紀半ばに活躍した数学者集団ブルバキは「数学を語るものは証明を語る」といったそうですが，まさにそのとおりです。

数学の他の分野と異なり，図形に関する性質は実際に図を描いて状況を確認しながら証明を読んだり，考えたりすることができます。図形に関するさまざまな性質を知ると同時に，証明の読み方，書き方になれてほしいと思います。

紀元前より学校で数学を学習する理由の一つに，まさに相手をどのようにして説得するか，その方法を身につけるための練習場所という考え方があります。

文学や哲学と異なり，数学においては純粋に論理だけで話を展開することができるので，説得術を練習するには非常にいい場所なのです。

もちろん，数学自身への興味として図形の性質を知ることが，それ自身たいへんな楽しみにもなります。

ここまでに学習した図形の性質は，今後学習するいくつかの分野で背景として登場します。