第15章　三角比

15.0　はじめに

前章では，中学校で学んだ図形の性質をもう少し深く紹介しました。本章では，「三角比」という新しい考え方を紹介し，さらにいろいろな計算ができるようになってもらいます。

中学校で学んだ図形の性質の中で，辺や角度を計算する方法はあまりありませんでした。「三平方の定理」が唯一といってもいいほどです。

「三角比」は，このタイプの考え方です。本章の後半で紹介する「正弦定理」や「余弦定理」，三角比を用いた三角形の面積の計算方法など，しっかり身につけておけば様々な応用ができます。

「三角比」について紹介するとき，いつも気になるのはたくさんの公式です。

確かにたくさんの公式がでて来るので，はじめて勉強する人はめんくらうかもしれません。そして，それだけで嫌になってしまうかもしれません。さらにそれを覚えなければいけないとなると，うんざりすることでしょう。

しかし，本当に覚えなければいけない公式はごくわずかです。本章で紹介する公式はどれも理論的に重要ではありますが，さまざまな応用に使われるものはそんなに多くありませんし，覚えるにしてもちょっとしたコツがあります。

それは，式自体を覚えるときにその証明に用いた図をいっしょに頭の中に入れることです。

三角比の考え方は，後で三角関数の考え方に発展し，様々な自然現象を表現するのに用いられます。本章でその基礎的なところをしっかりと身につけておいてください。

15.1　鋭角の三角比の定義

15.1.1　一つの例

木や建物の高さや川の幅を測りたいとしましょう。

これらのものがそんなに大きくなければ，巻尺などを使うことによって直接測定することができます。しかしこの方法では，せいぜい 10m 位が限度でしょう。それより高さが高かったり，幅が広かったりした場合には難しくなります。

そこで，間接的に測定することを考えましょう。
たとえば，図のような建物があったとしましょう。

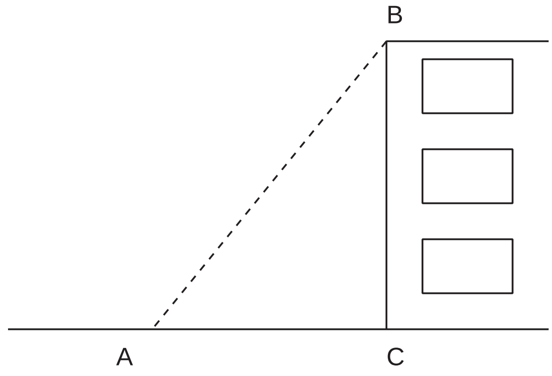


図 15.1: 建物の高さを求める

AC 間の距離は 10m，$\angle\mathrm{BAC}=65^\circ$ であったとしましょう。
中学校のときには，これをもとに縮図を描きました (図 15.2)。

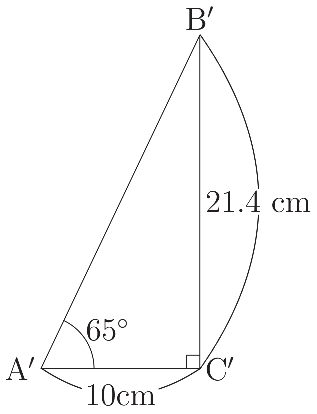


図 15.2: 図 15.1 の縮図

この図を A′C′ 間を 10cm となるように描いたとすると，B′C′ は大体 21.4cm になります。今求めようとしている BC 間の距離を xm とすると，

$$\frac{x}{10}=\frac{21.4}{10}$$

となるので，BC は大体 21.4m であることが判明します。
このように，縮図を描けばいつでも計算によって間接的に長さを求めることができます。
ここでちょっと考えましょう。本当に縮図を描かなければいけないのでしょうか?
これを検討するために，上でやったことをもう一度詳しく復習してみましょう。

縮図を描く理由は，中学校のときに学習した「図形の相似」に関する理論を用いているところにあります。つまり次の定理が成り立っていることが，計算の根拠です。

定理 (相似な図形の性質)　相似な図形の対応する線分の長さの比はすべて等しい。

三角形の相似条件に「二つの角の等しい三角形は相似である」というものがあるので，これをもとに縮図を描きました。

今の場合 $65°$ と「直角」の二つが等しく描かれているので，現実の三角形と縮図の三角形は相似です。そして $\mathrm{B'C'}$ を紙の上で測り，21.4cm という値を得たのでした。

そしてこの測定値と，上の定理によって $x\mathrm{m} : 10\mathrm{m} = 21.4\mathrm{cm} : 10\mathrm{cm}$ という比例式が得られ，方程式

$$\frac{x}{10} = \frac{21.4}{10}$$

が得られたのでした。

ここで必要なのは，右辺の $\dfrac{21.4}{10}$ だということに注意しましょう。言い替えると，右辺の値さえわかっていれば，図を描かなくても計算できます。

もちろん右辺の値 (特に分子) は，縮図を描かなければ得られません。しかし今の場合は直角三角形になっているので，右辺の値をあらかじめ調べておくことができるのです。

次の図を見てください。

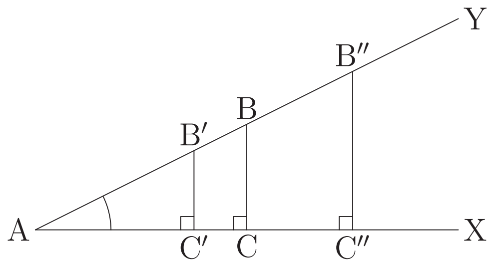


図 15.3: 一つの角 A を固定したときの直角三角形

鋭角 $\angle\mathrm{YAX}$ が与えられたとしましょう。辺 AY 上に点 B をとり，B から辺 AX に垂線 BC を下ろします。このときの点 C を「B から AX に下ろした **垂線の足**」といいます。 **垂線の足**

このようにして直角三角形 ABC が得られます。ここで，B を AY 上の色々な場所にとってみましょう (図の $\mathrm{B'}$ や $\mathrm{B''}$)。そのたびに，直角三角形ができますが，これらがすべて相似であることは，すぐにわかります (相似条件「二つの角」が成り立っています)。

よってこれらの三角形の辺の比はすべて等しくなっています。つまり

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'C'}} = \frac{\mathrm{B''C''}}{\mathrm{A''C''}} = \cdots$$

という式が成り立つことになります。

この結果は，比の値 $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$ などが ∠A の大きさだけで決まっていることを意味します。それゆえ，もしそれぞれの角度に対する $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$ をあらかじめ調べておけば，先の例の $\frac{21.4}{10}$ に相当する部分がわかっていることになり，縮図を描かなくても計算ができるようになります。

15.1.2 正弦・余弦・正接

以上のことをもとにして，次のように定義します。定義の後にある図とよく見比べて間違いなく頭の中に入れてください。

定義 (正弦，余弦，正接) ∠ C= 90° の直角三角形 ABC に対して，

$$\sin A = \frac{a}{c}, \qquad \cos A = \frac{b}{c}, \qquad \tan A = \frac{a}{b}$$

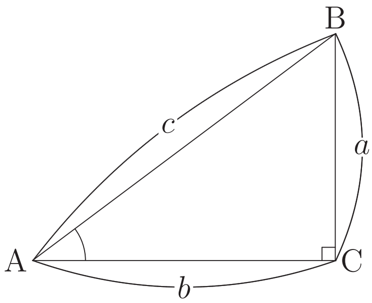
と定める。$\sin A$ を角 A に対する **サイン** あるいは **正弦**，$\cos A$ を角 A に対する **コサイン** あるいは **余弦**，$\tan A$ を角 A に対する **タンジェント** あるいは **正接** という。

$\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ を総称して角 A の **三角比** という。 **(定義終)**

サイン
正弦
コサイン
余弦
タンジェント
正接
三角比

注意

(1) 上の定義で用いた a, b, c は次の図のように定めています。



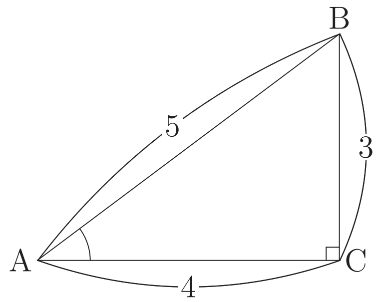
図からお分かりのように，頂点 A の向い側の辺 (つまり BC) の長さを対応する小文字である a で表しています (残り二つについても同様です)。
今後三角形の辺の長さを表すときには特に断らない限り，この方法で記号を用いることにします。
また，対象としている角が左下に，また直角が右下にあるように描いていることにも注意してください。

(2) $\sin A,\ \cos A,\ \tan A$ はそれぞれ「さいんえー」,「こさいんえー」,「たんじぇんとえー」と読みます。

(3) ここでは sin, cos, tan の三つしか紹介しませんが，少し古い文献を見るとこれ以外に sec, cosec, cot というのがあることに気がつくかもしれません。本書では，必要になったら紹介することにします。

(注意終)

例　下の図のような直角三角形を考えましょう。



このとき，

$$\sin A = \frac{3}{5}, \qquad \cos A = \frac{4}{5}, \qquad \tan A = \frac{3}{4}$$

(例終)

補注　上の例で 3，4，5 を辺の長さに持つ直角三角形を与えましたが，これがちゃんと直角三角形になっていることを確認しておいてください。

実際，

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

が成り立っていますので,「三平方の定理の逆」より，この三角形が直角三角形であることが結論できます。

このように，三辺の長さが整数の直角三角形は他にもあります。本章のどこかにその例が出てきますので，注意して読んでみてください。

一般に三つの整数の組 $(a,\ b,\ c)$ で

$$c^2 = a^2 + b^2$$

を満たすようなものを **ピタゴラス数** といいます。　**ピタゴラス数**

実はピタゴラス数は無数にあります。他にどんなものがあるか，調べてみるのもいいでしょう。

(補注終)

練習 148 図 15.4 の直角三角形で，$\sin A,\ \cos A,\ \tan A$ を求めよ。

また，$\sin B,\ \cos B,\ \tan B$ はどうか。

上の練習では角 B に対する三角比も求めてもらいました。定義の注意にも書きましたが，対象となっている角が左下にあることに注意してください。わかりにくいようなら，手間を惜しまず角 B が左下にくるように三角形を描き直して考えましょう。

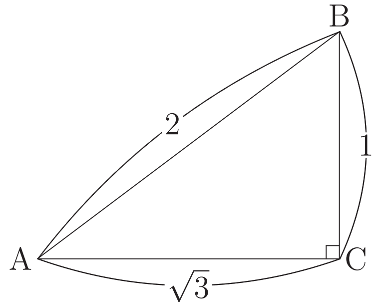
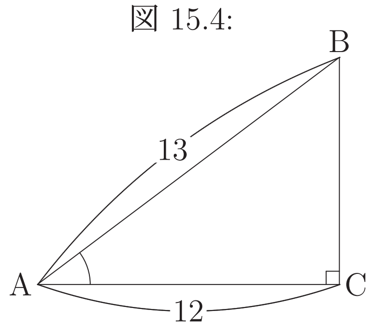


図 15.4:



例題 43 下の図のような直角三角形 ABC で，角 A の三角比を求めよ。

解説　「角 A の三角比」とは，$\sin A,\ \cos A,\ \tan A$ のことでした。つまり問題は $\sin A,\ \cos A,\ \tan A$ の三つの値を求めよ，というものです。

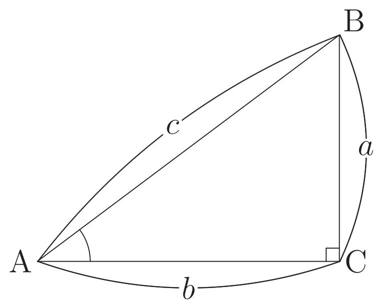
ところで，与えられた図から上の三つのうち一つはすぐにわかりますが，それはどれでしょう？　そう $\cos A$ ですね。

しかし残りの二つは辺 BC の長さが係わっており，今のところわかりません。そこでこの辺の長さを計算することが必要になりますが，それには「三平方の定理」を用います。

念のために復習しておきましょう。

定理 (三平方の定理)　下の図のような直角三角形において，

$$c^2 = a^2 + b^2$$



辺 BC の長さは a と表していましたので,「三平方の定理」より

$$13^2 = a^2 + 12^2$$

となり，これを解いて $a = 5$ を得ます。
　後は三角比の定義から値を出すだけで，簡単です。

解答例　辺 BC の長さを a とすると,「三平方の定理」より

$$13^2 = a^2 + 12^2$$

これを解く。

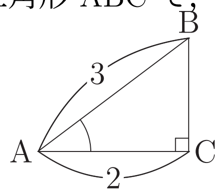
$$\begin{aligned} 169 &= a^2 + 144 \\ a^2 &= 25 \\ a &= \pm 5 \end{aligned}$$

a は辺の長さなので $a > 0$。よって $a = 5$。
　これより

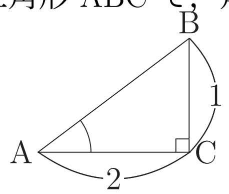
$$\sin A = \frac{5}{13}, \quad \cos A = \frac{12}{13}, \quad \tan A = \frac{5}{12} \quad \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 149 下の図のような直角三角形 ABC で，角 A の三角比を求めよ。



練習 150 下の図のような直角三角形 ABC で，角 A の三角比を求めよ。



15.1.3　30°，45°，60° の三角比

　さて，以上が鋭角[1] に対する三角比の定義ですが，A を具体的な角度で考えましょう。
　といっても，全部すぐに計算できるわけではありません。本節では，ひとまずすぐに値のわかる特殊な角度について計算しておきます。
　その角度とは，表題にも挙げた三つの角度，つまり 30°，45°，60° です。
　これらの三角比を求めるために，中学校で学習したことを一つ復習しておきましょう。それは，次のような直角三角形の三辺の比です。

[1] 0° より大きく 90° より小さい角を **鋭角** といいました。

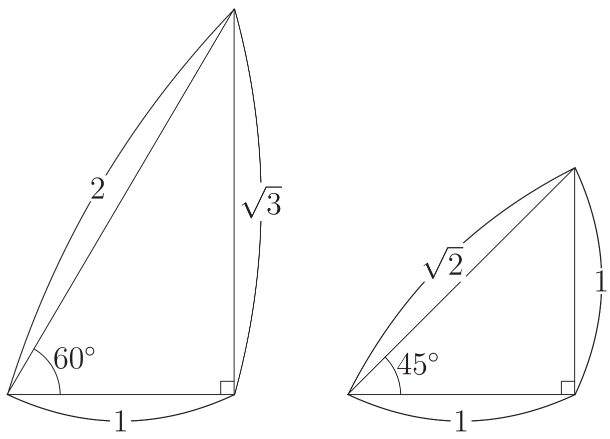


図 15.5: 中学校の復習

ここには 30° は直接出てきていません。しかしよく見ると，左側の図の相棒の角度が 30° です。三角形の内角の和は 180° だったことを思い出してください。

この図に与えた値と，三角比の定義から次のことがわかります。

例

(1) 60° の三角比

上の図 15.5 の左側の方から，

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

(2) 45° の三角比

上の図 15.5 の右側の方から，

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan 45^\circ = 1$$

(例終)

問 82 30° の三角比を求めよ。

注意　これら三つの角度 30°，45°，60° の三角比は，覚えるなりしていつでもすぐに出せるようになっておいてください。

個人的には三角比の値を覚えるより，上の図を覚える方がいいと思っています。

左の 60° の方は $1 : 2 : \sqrt{3}$，右の 45° の方は $1 : 1 : \sqrt{2}$ のように覚えると覚えやすいでしょう。授業などでは，左の方を「いち，にい，るーとさん」，右の方は「いち，いち，るーとに」などといいながら説明しています。対応する辺の順番が異なっていることに注意してください。 **(注意終)**

15.1.4　三角比の表

$30°$，$45°$，$60°$ 以外の角度の三角比は，(今の段階では) 簡単に計算することができません。しかし昔の人がコツコツと計算し，表を作ってくれています。それが巻末に挙げた表です。

たとえば，$\sin 27°$ は，表より 0.4540 であることがわかります (確かめてください!)。

しかし一つ注意しましょう。ここに挙げられている数は **近似値** です[2]。　**近似値**

近似値というのは，その名の通り「近くて似た値」，つまり大体の値です (何に似ているかといえば,「本当の値」にです)。

ちなみに，上の $\sin 27°$ の値は 0.4540 であり，小数第 4 位が 0 になっています。これは，$\sin 27°$ の値を計算した結果の小数第 5 位を四捨五入したもので，このことから $\sin 27°$ の正確な値は

$$0.45395 \leqq \sin 27° < 0.45405$$

であることもわかります。

小数第 4 位の 0 は無駄についているわけではないことに，留意してください。ただし，この値を用いて計算するときには 0 を無視して構いません。

三角比を現実の問題に適用して，いろいろな値を計算するときには，ちょうどではなくても，それに近い十分な精度をもつ値があればよいことが多いのです。そういったことからこの表で与えたような近似値が通常用いられます。もちろんこれで不十分なら，より精度の高い値を計算し直して，その値を用います。

一方，$30°$，$45°$，$60°$ の三角比の値は，ちょうどです。これら以外の角度でちょうどのものの例を補講に与えておきました。

近似値については，1 冊の本が書けるほどの内容があります。特に数学を他分野に応用するときには，必要になることが多いでしょう。各自勉強しておいてください。

注意　三角比の値を計算するには，微積分を用います。これによっていくらでも高い精度の値を求めることができるようになります。特に現在のように，性能のよいコンピュータが簡単に手に入るようになった時代では，計算のプログラムさえ作れれば，三角比の値を求めるのは容易です。

少し高価な電卓 (「**関数電卓**」と呼ばれるような電卓) には三角比を計算するキーがあらかじめ用意されているものもあります。　**関数電卓**　**(注意終)**

練習 151 次の三角比の値を，巻末の表を用いて求めよ。

(1) $\sin 13°$　　(2) $\cos 73°$　　(3) $\tan 89°$

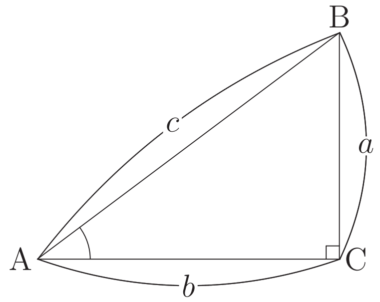
---

[2]前節で求めた $\tan 60°$ を表で求めてみてください。$\sqrt{3}$ のちょうどの値ではないことがわかりますね。

次の問いはすぐに必要になりませんが，やっておくといろいろと面白いことが見えてくるでしょう。

問 83 三角比の表を用いて，$\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ のそれぞれのグラフを描いてみよ。

さて，小数第 2 位くらいまでなら，簡単な作業をすることである程度正確に三角比を求めることができますので，その方法をちょっと紹介しておきましょう。そのために，三角比の定義をもう一度復習しておきます。



さて，上の図のような直角三角形に対して，

$$\sin A = \frac{a}{c}, \qquad \cos A = \frac{b}{c}, \qquad \tan A = \frac{a}{b}$$

でした。分母を払うと，

$$a = c\sin A, \qquad b = c\cos A, \qquad a = b\tan A$$

ここでたとえば $c = 1$ とすると，

$$a = \sin A$$

となります。ということは，斜辺の長さが 1 の直角三角形では，図の BC の長さがちょうど $\sin A$ の値に等しいわけです (図 15.6)。

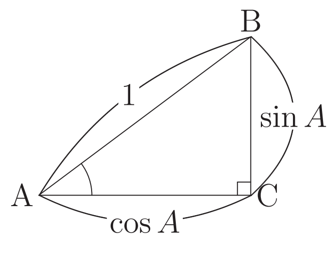


図 15.6: 斜辺の長さが 1 のときの直角三角形

そこで，図 15.7 のような図を用意します。図の円弧の半径は 1 にとってあります。次に，角 A を表す動径を描き，円弧との交点から 0° を表す線へ垂線を下ろします。この垂線の長さを測れば $\sin A$ の値が得られます。

以下この作業を続ければ，それぞれの角度の正弦の値が求められます (実際に作業するときには半径を 10cm などにとった方がより正確な値が求められるでしょう)。

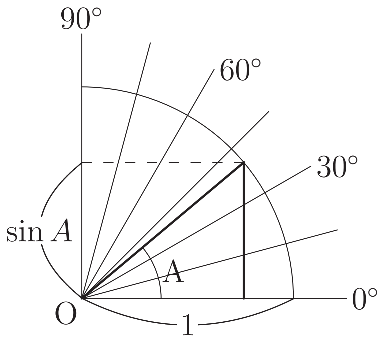


図 15.7: $\sin A$ の求め方

$\cos A$ についても同様です。

また，$b = 1$ とすると，同じように BC の長さがちょうど $\tan A$ の値になります (図 15.8)。

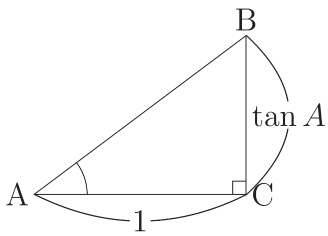


図 15.8: $\tan A$

$\tan A$ のときには次のような図を描きます (図 15.9)。

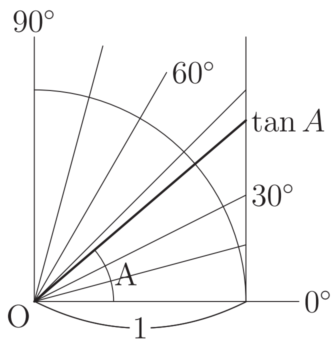


図 15.9: $\tan A$ の求め方

問 84 図 15.9 を用いて角 A の正接の値を求める方法を説明せよ。

問 85 ここまでの説明をもとに，0°, 10°, $\cdots$, 90° の三角比の値を求めよ。

ここまでは与えられた角の三角比を求めてきましたが，逆に三角比の値から角度を求めることもできます。

たとえば，

例　$\sin A = 0.8572$ となる A の値は，三角比の表から A$= 59^\circ$ です。　**(例終)**

練習 152 次の式で与えられる角 A を求めよ。
(1) $\sin A = 0.0175$　(2) $\cos A = 0.8387$　(3) $\tan A = 2.0503$

15.2　三角比の相互関係

三角比に関しては様々な公式が成り立ちます。全部覚えるのはたいへんかもしれませんが，できるだけ頭に入れておいてください。

15.2.1　$90^\circ - \theta$ の三角比

三角比の表をよく見ると，面白い特徴に気がつきます。たとえば，次の定理が成り立っています (tan に関するものは，ちょっと気がつかないかもしれませんが)。

定理 ($90^\circ - \theta$ **の三角比)**
(1) $\sin(90^\circ - A) = \cos A$
(2) $\cos(90^\circ - A) = \sin A$
(3) $\tan(90^\circ - A) = \dfrac{1}{\tan A}$

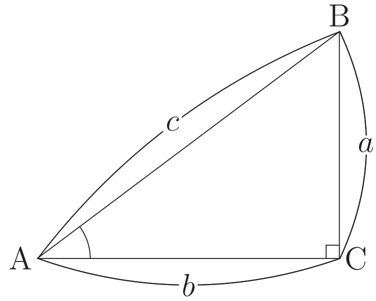
三角比の定義をよく見れば，証明は明らかでしょうから，確認はみなさんにお任せします。

15.2.2　三角比の相互関係

多くの公式の中でもっとも重要な定理の一つが次のものです。

定理 (三角比の相互関係)
(1) $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$
(2) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
(3) $1 + \tan^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A}$

注意　定理の中の $\sin^2 A$ は $(\sin A)^2$ を意味します (他も同様)。
三角比を扱うときには $(\sin A)^2$ の形が数多く現れます。そのたびに かっこ を書くのは面倒なので，このような約束をおいています。　**(注意終)**



証明　もう一度三角比の定義を復習する。図のように記号を定める。
このとき，

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \tan A = \frac{a}{b}$$

だった。
このとき (1) は，

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \sin A \div \cos A = \frac{a}{c} \div \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \tan A$$

次に「三平方の定理」より

$$a^2 + b^2 = c^2$$

両辺を c^2 で割ると

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$\sin A = \dfrac{a}{c}$, $\cos A = \dfrac{b}{c}$ だったので (2) を得る。
最後に

$$1 + \tan^2 A = 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{b^2 + a^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} = 1 \div \frac{b^2}{c^2} = \frac{1}{\cos^2 A}$$

(証明終)

定理「三角比の相互関係」によって，sin, cos, tan のいずれか一つの値がわかれば，残り二つの値が計算できることがわかります。実はこれは，直角三角形の二つの辺の長さがわかっているときには「三平方の定理」を用いれば残りの辺の長さが計算できる，ということと同じですね。
次の例題でどのように使うのか，身につけてください。

例題 44 $\sin A = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos A$, $\tan A$ の値を求めよ。

解説　二通りの解答方法があります。別解として解説した方法の方がやさしく感じられるかもしれませんが，後のことを考えると，第一の方法になれておいてほしいと思います。

さて，まず第一の方法です。

定理「三角比の相互関係」の二番目の式

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

から，$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$ ですから，ここに $\sin A$ の値を代入することで $\cos^2 A$ の値がわかります。$\cos A$ の値は三角形の辺の長さから計算されているので，その値は正であることに注意しましょう。これから $\cos A$ の値がわかります。

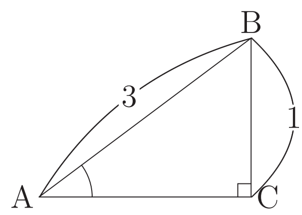
次に定理「三角比の相互関係」の一番目の式

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

を用いることで，$\tan A$ の値が計算できます。

第二の方法は,「三平方の定理」を用いるものです。

まず下のような図を描きます。



三角比は辺の長さの比がわかっていればいいので，辺の長さを図のように考えても構わない，ということに注意してください。

このように辺の長さがわかれば,「三平方の定理」を用いて残りの辺の長さを計算することができます。実行すれば，$\cos A$, $\tan A$ が出せるわけです。

解答例　$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$ より，

$$\cos^2 A = 1 - \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}$$

$\cos A > 0$ より，

$$\cos A = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \cdots \textbf{(答)}$$

また，$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ より，

$$\tan A = \sin A \div \cos A = \frac{1}{3} \div \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

別解　上の図より,「三平方の定理」を用いて,

$$\mathrm{AC}^2 = 3^2 - 1^2 = 8$$

AC は辺の長さなので AC>0。よって

$$\mathrm{AC} = 2\sqrt{2}$$

三角比の定義より,

$$\cos A = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \tan A = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \cdots \textbf{(答)}$$

(別解終)

練習 153 $\sin A = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos A,\ \tan A$ の値を求めよ。

練習 154 $\cos A = \dfrac{5}{13}$ のとき，$\sin A,\ \tan A$ の値を求めよ。

上の例題と練習は $\sin,\ \cos$ の値を与えたものでした。次に $\tan$ の値がわかっているものをやりましょう。

別解は各自で考えてみてください。

例題 45 $\tan A = \dfrac{3}{2}$ のとき，$\sin A,\ \cos A$ の値を求めよ。

解説　今度は定理「三角比の相互関係」の第三の式

$$1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$$

を用います。この等式の左辺に与えられた $\tan A$ の値を代入すれば $\cos A$ の値が計算できます。

次に $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ の分母を払って,

$$\sin A = \cos A \tan A$$

という形にしておけば，$\sin A$ を簡単に計算することができます。

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ を用いて計算することもできますが，上のやりかたの方が少し簡単でしょう。

解答例

$$1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$$

より，
$$\frac{1}{\cos^2 A} = \frac{13}{4}$$
よって
$$\cos^2 A = \frac{4}{13}$$
$\cos A > 0$ なので，
$$\cos A = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13} \quad \cdots \textbf{(答)}$$
　また $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ より，
$$\sin A = \cos A \tan A = \frac{3\sqrt{13}}{13} \quad \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 155 $\tan A = \sqrt{3}$ のとき，$\sin A,\ \cos A$ の値を求めよ。

15.3　鈍角の三角比

　ここまでは，直角三角形をもとに三角比を考えてきました。対象となる角度は鋭角，つまり 0° より大きく 90° より小さい角の三角比だけを考えてきたわけです。
　しかしもっと大きい角，たとえば 120° といった角度にも三角比は定義でき，そこまで考え方を広げると実に有用であることがわかっています。
　本節ではまず鈍角まで三角比の考え方を拡張します。それ以上大きな角についても同様に考えることができますので，先取りして各自研究しておくことをお勧めします。

15.3.1　鈍角の三角比

三角比と座標平面

　90° より大きく 180° より小さい角を **鈍角** といいます (ちなみに 90° を **直角**，180° を **平角** といいました)。　**鈍角** **直角** **平角**
　三角比を鈍角まで拡張するには，ちょっと考え方の変更が必要になります。実際，三角形の内角の和は 180° でしたから，鈍角を持つような直角三角形を考えることができないからです。
　そこでまず準備として，つぎのような考察をしましょう。
　座標平面上で下のような図を考えます。

図の中で考えている**角の頂点を原点 O に，一方の辺を x 軸の正の部分にとっている**ことに注意してください。

図の中にある θ という記号は，ギリシア文字で「しーた」と読みます。数学で角度を表すときに習慣的に使われる文字ですので覚えておいてください。

また，θ は鋭角で考えています。

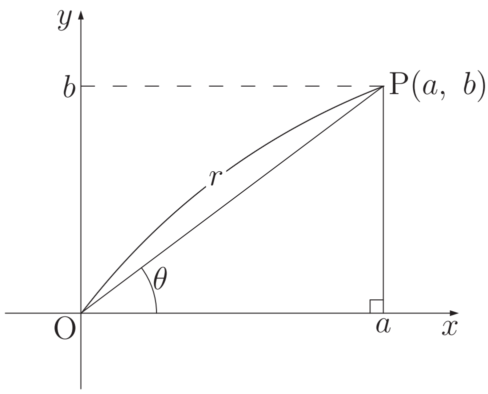


図 15.10: 三角比と座標の関係

さて，このとき角度 θ の三角比はどうなるでしょう。

$$\sin\theta = \frac{b}{r}, \quad \cos\theta = \frac{a}{r}, \quad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

となります。

座標を用いた言い方に直すと，

$$\sin\theta = \frac{\text{P の } x \text{ 座標}}{\text{OP}}, \quad \cos\theta = \frac{\text{P の } y \text{ 座標}}{\text{OP}}, \quad \tan\theta = \frac{\text{P の } y \text{ 座標}}{\text{P の } x \text{ 座標}}$$

となっています。

鈍角の三角比

上の言い替えをもとに，鈍角の三角比を定義しましょう。

次のような図で考えます (図 15.11)。この場合も，図の中で**考えている角の頂点を原点 O に，一方の辺を x 軸の正の部分にとっています**。

今後 x 軸の正の部分を **基準線** と呼ぶことがあります。 **基準線**

このとき，先と同じ式

$$\sin\theta = \frac{\text{P の } x \text{ 座標}}{\text{OP}}, \quad \cos\theta = \frac{\text{P の } y \text{ 座標}}{\text{OP}}, \quad \tan\theta = \frac{\text{P の } y \text{ 座標}}{\text{P の } x \text{ 座標}}$$

によって三角比を定義します。

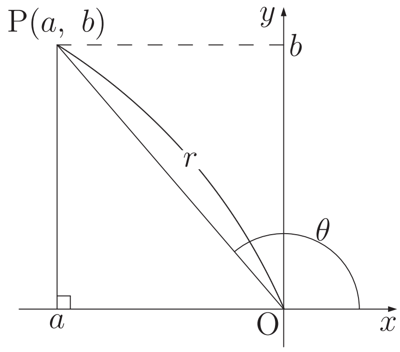


図 15.11: 鈍角の三角比

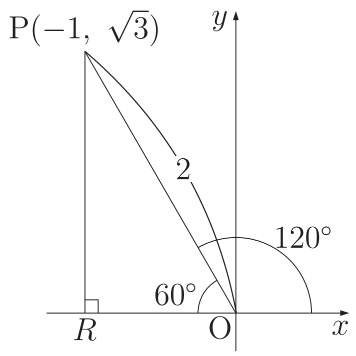


図 15.12: 120° の三角比

例　120° を求めてみましょう。

繰り返しますが，x 軸の正の部分を基準線にとっています。そこから 120° の線を描きます。

このとき，図の記号でいうと ∠POR が 60° になっていることに注意しましょう。そこで鈍角の三角比の定義にある r を 2 にとることにします。この 2 は，60° を含む直角三角形の三辺の比 $1 : 2 : \sqrt{3}$ の斜辺に相当するところが 2 であることから選んでいます。

すると図のような直角三角形が描け，P の座標は $(-1,\ \sqrt{3})$ になることがわかります。点 P の x 座標が 1 ではなく，-1 になっていることに注意してください。

以上のことから,

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

となります。 **(例終)**

問 86 同様にして 135° および 150° の三角比をそれぞれ求めてください。

注意　ここで紹介した座標平面を用いた三角比の定義は，平角より大きな角度の三角比の定義するときも同様に用いることができます。

試しに，210° の三角比などを考えてみてください。　**(注意終)**

0°，90°，180° の三角比

次に鋭角と鈍角以外の三角比をいくつか求めておきましょう。それが表題の 0°，90°，180° の三つの角です。

例　0° **の三角比**

まずは図を描いてみましょう。すると，ちょっと困ったことがおきます。

実際，0° を図に描こうとすると，角を作る二本の半直線が一致してしまい，三角形ができないからです。

こういった場合には，定義を忠実になぞれば値が求められます。では，どうなぞればいいでしょう。

まず，必要なのは角を表す二本の半直線です。その一方は基準線にとることになっていましたから，他方がどこにくるかを考えるのですが，これは上で見たように，基準線に一致します。つまり描いたつもりになればいいでしょう。

次に r をとります。

上の例では 120° の相棒の角が 60° であることから，$1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形を思いだし，$r=2$ と決めたのでした。

今の場合は，特に制限はありませんから何にとっても構いません。計算が楽になるように 1 にしましょうか。すると図は次のようになります (図 15.13)。

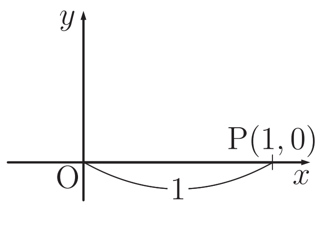


図 15.13: 0° の三角比

これに三角比の定義を適用すると，

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \cos 0^\circ = 1, \quad \tan 0^\circ = 0$$

であることがわかります。　**(例終)**

問 87 上の例をまねして，180° の三角比を求めよ。

例　90° **の三角比**

残っているのは 90° の三角比です。上の例のまねをして図を描くと次のようになるでしょう (図 15.14)。

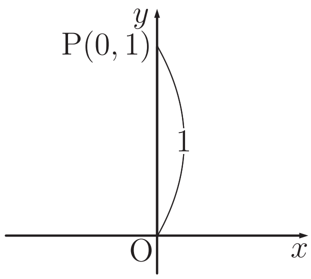


図 15.14: 90° の三角比

このようにして得られた値を三角比の定義に代入すればいいのですが，一つ注意しましょう。$\sin 90^\circ$ と $\cos 90^\circ$ は問題なく，

$$\sin 90^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0$$

であることがわかります。しかし，$\tan 90^\circ$ は，

$$\tan 90^\circ = \frac{1}{0}$$

となります。

第 4 章「実数の性質」の定理「実数の性質 1」を思い出しましょう。そこには，

定理 (実数の性質１)　実数の範囲内で加減乗除の四則計算が自由にできる。ただし 0 で割ることは考えない。

とありました。その脚注にも記したように，これは「分母が０の分数は考えない」ということと同じでした。

つまり，

$\tan 90^\circ$ **の値はない !!**

のです。 **(例終)**

注意　三角比の表には，0° と 90° の値が与えられていました!　そこをよく見ると $\tan 90^\circ$ の値は「なし」になっています。気がついていましたか? **(注意終)**

問 88 ここまでのまとめとして，下の表の空欄を埋めよ。

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\theta$									
$\cos\theta$									
$\tan\theta$									

15.3.2　単位円と三角比

ここで一つ「単位円」という考え方を紹介しておきます。単位円を用いると，三角比に関するいろいろな性質が簡単に証明できるからです。

単位円

定義は簡単です。

定義 (単位円)　原点を中心とする半径 1 の円を **単位円** という。　　**(定義終)**　**単位円**

単位円を用いると，三角比と座標が直接結びついてきます。次の図を見てください (図 15.15)。

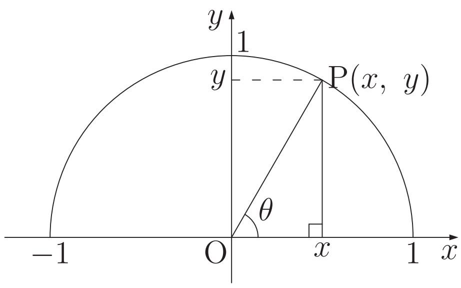


図 15.15: 単位円と三角比

この図で考えると，三角比の定義にある r は 1 になっています。ということは，たとえば,

$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y$$

となっています。

問 89　$\cos\theta,\ \tan\theta$ について,

$$\cos\theta = x, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

となっていることを確かめよ。

これは，332 ページで説明した，三角比の求め方と同様です。点 P の座標がそのまま $\sin\theta$ や $\cos\theta$ の値になっていることに注意してください。

問 90 332 ページからの説明にあわせると，$\tan\theta$ の値はどのように考えることができるか。またそのとき，$\tan 90^\circ$ の値が「なし」になるのはどう解釈できるか。

$\sin\theta$, $\cos\theta$ の値の範囲

以上に説明したことを用いると，$\sin\theta$, $\cos\theta$ のとりうる値の範囲がわかります。

実際，先に得られた関係式をちょっと書き直せば，

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta$$

となっています。

θ が 0° から 180° まで変わっていくことを頭のイメージすると，点 P は，円周上を移動していきます。それにつれて，x は 1 から -1 まで変化します。よって，

$$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$$

であることがわかります。

問 91 同様にして

$$0 \leqq \sin\theta \leqq 1$$

であることを確かめよ。

注意　似たようなことを 1 次関数や 2 次関数の値域を求めるときにやりましたね。実は，三角比は角 θ に対して $\sin\theta$ を対応させる関数であると考えることができます。

このような関数を **三角関数** といいます。三角関数については，後の章で詳しく解説します。 **三角関数**

(注意終)

さて，三角比の値の正負について，ちょっとまとめておきます。これについては，次の表 15.1 のようになっています。

表 15.1: 三角比の値の符号

	0°	$\cdots$	90°	$\cdots$	180°
$\sin\theta$	0	$+$	1	$+$	0
$\cos\theta$	1	$+$	0	$-$	-1
$\tan\theta$	0	$+$	なし	$-$	0

後で使いますので，よく確認しておいてください。

15.3.3　$180^\circ - \theta$ の三角比

さて，表題の三角比を与える公式を紹介しましょう。これは次のようなものです。

定理 ($180^\circ - \theta$ **の三角比**)
(1) $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$
(2) $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$
(3) $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$

証明　下の図のように記号を定める。このとき，

$$\sin\theta = y, \quad \cos\theta = x, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

だった。

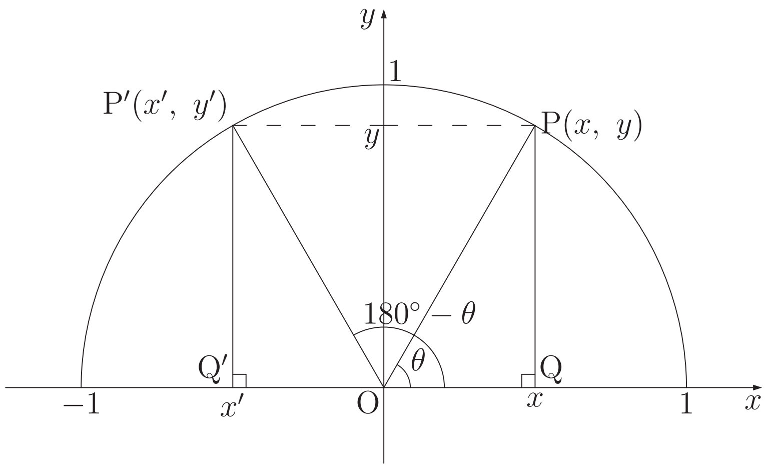


図 15.16: $180^\circ - \theta$ の三角比

このとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ と $\triangle\mathrm{OP'Q'}$ は y 軸に関して対称の位置にある。よって $y = y'$。
また，$x' = -x$。
一方

$$\sin(180^\circ - \theta) = y', \quad \cos(180^\circ - \theta) = x', \quad \tan(180^\circ - \theta) = \frac{y'}{x'}$$

これらより，結論を得る。　**(証明終)**

注意　上の図は，$0 < \theta < 90^\circ$ のように描いてありますが，それ以外の場合でも同じような図になります。　**(注意終)**

問 92 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき，上の図はどのようになるか。実際に描き，上の証明がそのまま適用できることを確かめよ。それ以外の場合 (つまり $\theta = 0^\circ$，90°，180° のとき) も検討せよ。

三角比の表は，0° から 90° までしかありませんでしたが，この公式を応用することで，鈍角の三角比を求めることができます。

実は逆で，上の公式があるので，三角比の表は 0° から 90° までしか必要ないのです。

例

$$\begin{aligned}
\sin 130^\circ &= \sin(180^\circ - 50^\circ) = \sin 50^\circ = 0.7660 \\
\cos 130^\circ &= \cos(180^\circ - 50^\circ) = -\cos 50^\circ = -0.6428 \\
\tan 130^\circ &= \tan(180^\circ - 50^\circ) = -\tan 50^\circ = -1.1918
\end{aligned}$$

(例終)

注意　cos と tan についての公式には，$-$(マイナス) がついていることに注意しましょう。 **(注意終)**

練習 156 次の三角比の値を求めよ。

(1) $\sin 159^\circ$　　(2) $\cos 92^\circ$　　(3) $\tan 179^\circ$

15.3.4　三角比の相互関係

334 ページで，定理「三角比の相互関係」を紹介しました。再掲すると，

定理 (三角比の相互関係)

(1) $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$

(2) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

(3) $1 + \tan^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A}$

この定理に出てきた角 A は鋭角でしたが，実は，鈍角の場合にもこの定理は成立します。

定理 (三角比の相互関係)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ に対して，

(1) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(3) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

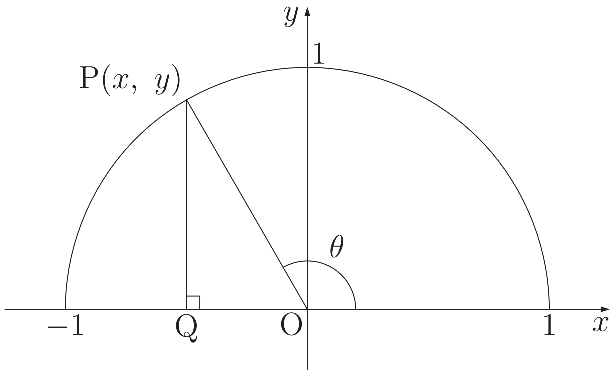


図 15.17: 三角比の相互関係 (鈍角の場合)

たとえば (2) は，下の図のように記号を定めたとき，次のように確かめられます。このとき，

$$\sin\theta = y, \quad \cos\theta = x = -\mathrm{OQ}$$

直角三角形 PQO の三平方の定理に注意すると，

$$\begin{aligned}\sin^2\theta + \cos^2\theta &= y^2 + x^2\\ &= \mathrm{PQ}^2 + (-\mathrm{OQ})^2\\ &= \mathrm{PQ}^2 + \mathrm{OQ}^2\\ &= \mathrm{OP}^2\\ &= 1\end{aligned}$$

問 93 残り二つの公式が成り立つことを確かめよ。

問 94 $\theta = 0^\circ,\ 90^\circ,\ 180^\circ$ のときも，公式が成り立つことを確かめよ。(もちろん $\theta = 90^\circ$ のとき (1) や (3) は示す必要はありません。)

定理「三角比の相互関係」を用いた計算を紹介しておきます。

例題 46 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta,\ \tan\theta$ の値を求めよ。

解説　前に同じような問題をやっています。

与えられたものが $\cos\theta$ なら，同じ方法で解くことができます。復習をかねて，下の解答例を見る前に，自分で計算してみてください。

忘れてしまった人のために，もう一度簡単に書いておきましょう。

定理「三角比の相互関係」の (2) より，$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ ですから，ここに $\cos\theta$ の値を代入すれば，$\sin\theta$ の値を求めることができます。次に定理「三角比の相互関係」の (1) を用いれば $\tan\theta$ を求めることができます。

ちなみに，表 15.1「三角比の値の符号」(344 ページ) より，θ は鈍角です。
このことから，先の例題と同じように別解を与えることもできます。各自研究してください。

解答例

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ で $\sin\theta \geqq 0$ なので，

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \cdots \textbf{(答)}$$

また，

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \div \left(-\frac{1}{3}\right) = -2\sqrt{2} \quad \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 157 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$ のとき，$\sin\theta,\ \tan\theta$ の値を求めよ。

練習 158 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\tan\theta = -2$ のとき，$\sin\theta,\ \tan\theta$ の値を求めよ。

sin の値が与えられているときには，ちょっと注意が必要です。

例題 47 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta,\ \tan\theta$ の値を求めよ。

解説　上の例題と同じ系統のものですが，ちょっと注意が必要です。というのも，上の例題では $\cos\theta$ の符号に関係なく $\sin\theta$ の符号は正でした。しかし今度の場合，同じように $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ から $\cos\theta$ を求めようとするとき，$\cos\theta$ の値は正のことも負のこともありますから，どちらであると確定させることができません (表 15.1「三角比の値の符号」参照)。
以上の検討から，$\cos\theta$ は正のことも負のこともありますので，それぞれの場合にわけて解答を作っていくことになります。

解答例

$$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = \frac{8}{9}$$

よって

$$\cos\theta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(i) $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき,

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{1}{3} \div \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

(ii) $\cos\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき,

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{1}{3} \div \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

以上から

$\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3},\ \tan A = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ または $\cos\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\ \tan A = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ $\cdots$**(答)**

(解答例終)

練習 159 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta = \dfrac{5}{13}$ のとき, $\cos\theta,\ \tan\theta$ の値を求めよ。

15.4 三角比と図形

三角比を図形に応用すると, さまざまな値を計算することができるようになります。その根拠となるのが「正弦定理」と「余弦定理」です。

名前からわかるようにそれぞれ正弦 (sin) と余弦 (cos) が関係した定理です。

15.4.1 正弦定理

まずは「正弦定理」です。

前章で学習したように, △ABC の三つの頂点 A, B, C に対して, この三つを通る円が必ず存在します)。

このような円を△ABC の **外接円** といいました。 **外接円**

さて,「正弦定理」は次のようなものです。

定理 (正弦定理) △ABC の外接円の半径を R とするとき, **正弦定理**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

が成り立つ。

非常に美しい形をしていますね!

注意　R が外接円の半径なので $2R$ はその直径に等しい。

また，326 ページの注意 (1) で注意したように，頂点 A の向い側の辺 (つまり BC) の長さを対応する小文字である a で表しています。 **(注意終)**

証明　A について (i) 鋭角の場合，(ii) 直角の場合，(iii) 鈍角の場合，に場合分けして証明する。

(i) A が鋭角の場合

B を通る外接円の直径 BD をひく。

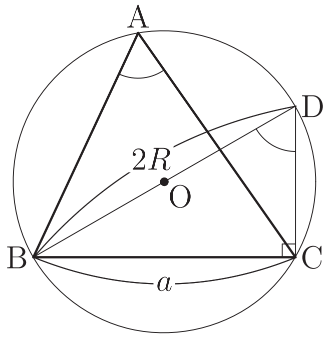


図 15.18: A が鋭角の場合

「円周角の定理」より ∠A= ∠ D であり，BD が直径であることから，∠DCB は 90°。よって

$$\sin A = \sin D = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}} = \frac{a}{2R}$$

これを変形すれば，

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R$$

も同様に証明できるので，定理が得られる。

(ii) A が直角の場合

$\sin A = 1$ である。

一方 BC が外接円の直径にもなっているので，$a = 2R$。

よって，

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

(iii) A が鈍角の場合

四角形 ABCD は円に内接しているので，

$$\angle \mathrm{A} = 180^\circ - \angle \mathrm{D}$$

よって，

$$\sin A = \sin(180^\circ - \angle \mathrm{D}) = \sin D = \frac{a}{2R}$$

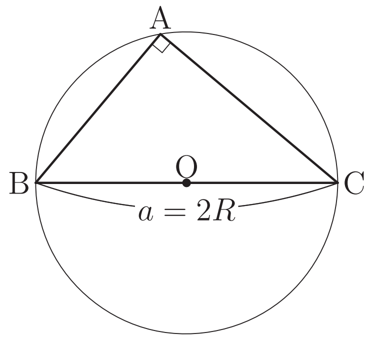


図 15.19: A が直角の場合

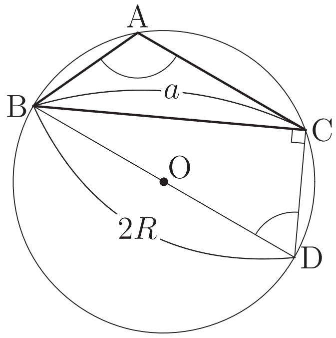


図 15.20: A が鈍角の場合

(証明終)

「正弦定理」の使いかたを見てみましょう。

例題 48 △ABC において，$a = 15$, $A = 60°$, $B = 45°$ のとき，b を求めよ。

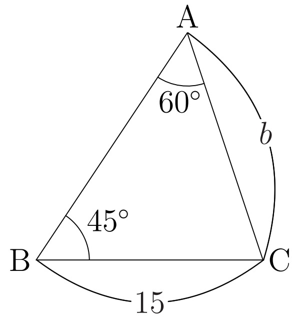
解説　「正弦定理」をもう一度見ましょう。それは次のような形のものでした。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

この式で，各辺は $\dfrac{a}{\sin A}$ のような分数で，三角形の一つの角と向い側の辺の長さで式が作られていることに注意しましょう。

言い替えると，向かい合う一組の角の大きさと辺の長さがわかっていれば，いろいろな計算ができることを示唆しています。

そこでまず問題の状況を図にしてみましょう。



うまい具合に A$=60^\circ$ と $a=15$ が与えられています。

そして，計算を求められている b についても，向い側の角である B が 45° とわかっています。

これらのことから，

$$\frac{15}{\sin 60^\circ}=\frac{b}{\sin 45^\circ}$$

という b に関する方程式が得られ，後はこれを解けばよいことになります。

解答例　「正弦定理」より，

$$\frac{15}{\sin 60^\circ}=\frac{b}{\sin 45^\circ}$$

両辺に $\sin 45^\circ$ をかけると，

$$b=\sin 45^\circ\times 15\div\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 15\times\frac{2}{\sqrt{3}}=5\sqrt{6}\ \cdots$$ **(答)**

(解答例終)

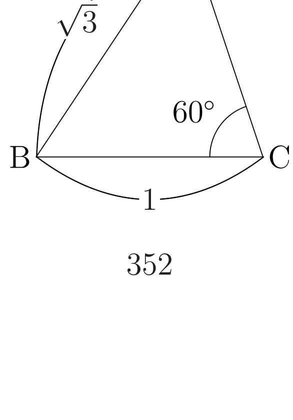
練習 160 $\triangle$ABC について，$a=4,\ A=120^\circ,\ C=30^\circ$ のとき c を求めよ。

練習 161 $\triangle$ABC について，$a=\sqrt{3},\ A=60^\circ,\ C=75^\circ$ のとき b を求めよ。

今度は，角を求める問題をやりましょう。

例題 49 $\triangle$ABC において，$a=1,\ c=\sqrt{3},\ C=60^\circ$ のとき，A を求めよ。

解説　状況を図にしてみると，次の図のようになります。



「正弦定理」が使える状況になっていることが確認できますね。

さて，式を作ると，

$$\frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$$

となります。

ここで A を求めたいのですが，すぐにはできないので，まず $\sin A$ を求めます。しかしこのタイプの方程式には今まで出会ったことがありません。

$x = \sin A$ とおくと，

$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$$

という形をしています。

この形の方程式は「分数方程式」と呼ばれるものです。ま，名前はどうでも，解ければいいのです (分数方程式の解き方については後の章で解説します)。

しかし，今の場合はそんなに難しくありません。両辺の逆数をとればいいのです。つまり，両辺とも分母と分子を入れ換えるのです。すると，

$$\frac{\sin A}{1} = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}}$$

となり，これは慣れ親しんだ形の方程式になります。ここでは，逆数をとったことをはっきりさせるために，左辺の分母を書きましたが，通常はこんなことはしません。

さて，この式を計算すると，

$$\sin A = \frac{1}{2}$$

を得ます。これを満たす A は何度でしょう。

問 88 (342 ページ) で作った表を見てください。sin の値が $\frac{1}{2}$ である角度が見つかりますね。それも二つ！

そう，30° と 150° です。

今 $C = 60^\circ$ でしたから，$A = 150^\circ$ はありえません。実際，三角形の内角の和は 180° であり，$A = 150^\circ$ なら $C = 60^\circ$ とあわせると 180° を越えてしまうからです。

よって，$A = 30^\circ$ と結論できます。

解答例　「正弦定理」より，

$$\frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$$

両辺の逆数をとると，

$$\sin A = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}}$$

これを計算して，

$$\sin A = \frac{1}{2}$$

よって，$A = 30^\circ$ または 150°。しかし三角形の内角の和は 180° なので，

$$A = 30^\circ \ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

補注　$a \neq 0$ に対して，$a \times x = 1$ となる数 x が必ず見つかります。$x = \dfrac{1}{a}$ です。この数 $\dfrac{1}{a}$ を a の **逆数** といいます。たとえば 3 の逆数は $\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{3}{5}$ の逆数は $-\dfrac{5}{3}$ です。　**逆数**

もとの数が等しければ，その逆数も当然等しい。この問題では，この事実を用いて分数方程式を解きました。

もちろん，一般の分数方程式をこの方法で解くことはできません。　**(補注終)**

練習 162 $\triangle$ABC において，$a = \sqrt{2}$, $b = 2$, $A = 30^\circ$ のとき，B を求めよ。

15.4.2　余弦定理

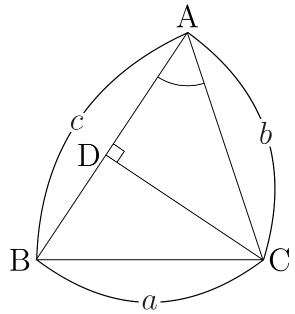
三角比に関するもう一つの重要な定理は「余弦定理」です。

定理 (余弦定理)　$\triangle$ABC において，　**余弦定理**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

証明　(i) $\triangle$ABC が鋭角三角形の場合[3]

頂点 C から辺 AB に下ろした垂線の足を D とする。



[3]三つの角が **すべて** 鋭角の三角形を **鋭角三角形** といいます。
これに対して，どれか一つの角が鈍角の三角形を **鈍角三角形** といいます。
二つの角が鈍角になる三角形はありませんよね。

　このとき，

$$\mathrm{AD} = b\cos A, \quad \mathrm{CD} = b\sin A$$

である。よって，

$$\mathrm{BD} = c - b\cos A$$

　△ BDC に「三平方の定理」を適用すると，

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{BD}^2 + \mathrm{CD}^2$$

　上の値を代入して，

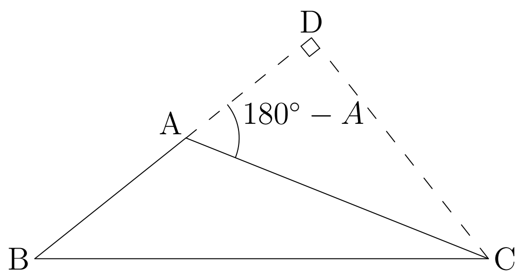
$$a^2 = (c - b\cos A)^2 + (b\sin A)^2$$

　右辺を展開し整理する。$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ に注意すれば，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

を得る。

　(ii) A が鈍角の場合



　このとき，

$$\mathrm{AD} = b\cos(180° - A) = -b\cos A, \quad \mathrm{CD} = b\sin(180° - A) = b\sin A$$

　よって，

$$\mathrm{BD} = \mathrm{AB} + \mathrm{AD} = c - b\cos A$$

　以下 (i) と同様の計算で，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

を得る。

　(iii) A が直角のとき

　右辺の $\cos 90° = 0$ なので右辺は，

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2$$

　一方「三平方の定理」より $b^2 + c^2 = a^2$。よって，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

他の二つの式も同様にして得られる。　**(証明終)**

注意　(ii) で，$\mathrm{AD} = -b\cos A$ となり，右辺は一見負の数のように見えますが，A は鈍角でしたから $\cos A$ は負。よって，値自体は 正 になっていることに注意しましょう。

(注意終)

上の証明の (iii) のとき,「余弦定理」

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

の右辺は $b^2 + c^2$ で結局

$$a^2 = b^2 + c^2$$

というおなじみの「三平方の定理」の式となっています。

これより,

「余弦定理」は「三平方の定理」の一般化

であるといえます。

もう一つ。「余弦定理」の三つの式をよく見てください。どんな特徴がありますか。

三つとも同じ形をしています。ということは，全部覚える必要はありません。一つだけ覚えて，残りはそれをまねして式を作ればいいわけです。

また，式

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

はどんなふうにできているでしょう。右辺は，b と c と角 A，つまり「二辺とその間の角 (二辺 夾(きょう) 角)」で構成されています。

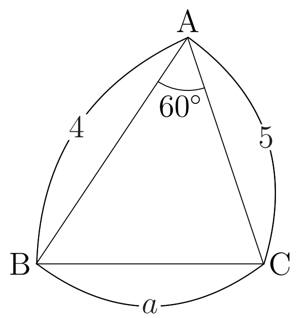
三角形の合同条件から二辺夾角が決まれば，その条件を満たす三角形は合同をのぞけば一つしかないことがわかっていますので，残りの辺が計算できるということも意味しています。

式の特徴,「二辺夾角」をよく記憶しておいてください。

「余弦定理」の使いかたを見てみましょう。

例題 50 △ ABC において，$b = 5,\ c = 4,\ A = 60^\circ$ のとき，a を求めよ。

解説　まずは問題の設定を図を描いてつかみましょう。



図から「二辺夾角」が与えられていることがわかります。よって,「余弦定理」を用いて残りの辺が計算できます。

この例題の場合「a を求めよ」とありますので，三つの公式のうち，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

を用いればいいですね。

辺の長さを求めているので $a > 0$ であることにも注意しましょう。

解答例　「余弦定理」より,

$$a^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos 60^\circ = 21$$

a は辺の長さなので $a > 0$。よって

$$a = \sqrt{21} \ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 163 △ABC で，$a = 5,\ b = \sqrt{3},\ C = 150^\circ$ のとき，c を求めよ。

「正弦定理」のときと同じように，今度は角を求めてみます。

例題 51 △ABC において，$a = 8,\ b = 7,\ c = 13$ のとき，C を求めよ。

解説　今度は三つの辺がわかっています。この場合も三角形の合同条件になっていることにちょっと気をつけておきましょう。

さて，角 C の含まれた「余弦定理」は,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

です。よって，$a,\ b,\ c$ をこの式に代入して $\cos C$ についての方程式と考えて解けば,

$$\cos C = -\frac{1}{2}$$

これを満たす C $(0^\circ < C < 180^\circ)$ は $C = 120^\circ$ です。

余弦の場合は正弦の場合と違って，角は必ず一つに決まります。

なお公式

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

をあらかじめ $\cos C$ について解いておいて,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

とし，これに与えられた値を代入した方が少し計算が早くなります。

解答例　「余弦定理」より，

$$\cos C=\frac{8^2+7^2-13^2}{2\times 8\times 7}=-\frac{1}{2}$$

今 $0^\circ<C<180^\circ$ なので，

$$C=120^\circ \ \cdots\textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 164 △ ABC において，$a=\sqrt{5},\ b=\sqrt{14},\ c=3$ のとき，B を求めよ。

15.4.3　三角形の形状

ここまでのまとめと復習をかねて，次のような問題を解いてみましょう。先を急ぐ人は，この節を飛ばしても構いません。

例題 52 △ ABC において，$\sin A=2\sin B\cos C$ が成り立つとき，△ ABC はどんな三角形か。

解説　はじめてこのような問題を見ると，ちょっとめんくらうかもしれません。「どんな三角形か」と問われたときに，どんなふうに答えたらいいのか，まずは想像がつかないからです。

ひとまず私たちが知っているちょっと特徴ある三角形といえば，二等辺三角形，正三角形，直角三角形くらいで，それ以外のものはこれといって特徴があるとはいえません。

ま，いずれも辺の長さに特徴がありますね。二等辺三角形はその名の通り二つの辺の長さが等しいですし，正三角形は三辺がひとしい。直角三角形は「三平方の定理」から

$$a^2+b^2=c^2$$

のような式が成り立つかどうかで，特徴づけられています (直角三角形であるための必要十分条件は $a^2+b^2=c^2$ のような式が成り立つことでした)。

そこで与えられた式を，辺の長さなどを用いて書き換えることを考えましょう。

「正弦定理」は

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

でした。ここで R は△ ABC の外接円の半径です。この中で，

$$\frac{a}{\sin A}=2R$$

の部分に注目し，これを $\sin A$ について解いてみると，

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

となります。同様にして

$$\sin B = \frac{b}{2R}$$

これで，R は用いるものの，$\sin A$ と $\sin B$ を辺の長さで表すことができました。

一方先の例題でやったように,「余弦定理」から

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

が得られます。

これらを与えられた式に代入しましょう。すると，ちょっと複雑ですが,

$$\frac{a}{2R} = 2 \times \frac{b}{2R} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

となります。外接円の半径 R が式の中に含まれているのでちょっと不安ですね。

ま，それはおいといて，この式を変形していきます。ちょっと説明が長くなりますが注意深く読み，変形のコツをつかんでください。

さて，両辺に $2R$ をかけると，うまい具合に R が消えます (一安心)。また右辺は約分でき，整理すると,

$$a = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a}$$

となります。

両辺に a をかけて分母を払うと,

$$a^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

両辺から a^2 をひけば，結局

$$b^2 - c^2 = 0$$

因数分解して

$$(b + c)(b - c) = 0$$

$b > 0,\ c > 0$ より $b + c \neq 0$ なので，両辺 $b + c$ で割れば,

$$b - c = 0$$

つまり,

$$b = c$$

を得ます。

最後の式は，二つの辺が等しいこと，つまり二等辺三角形であることを示しています。よって，もとの式が成り立つ三角形は二等辺三角形であることが結論できます。

もう一つ。上の変形は，同値変形であることに注意しましょう。

つまり，一番最後に得られた $b = c$ から出発して，上の変形を逆にたどることができ，結局もとの等式

$$\sin A = 2\sin B\cos C$$

が得られます。

解答例　「正弦定理」より，

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}$$

また,「余弦定理」より

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

これらを与えられた式に代入すると，

$$\frac{a}{2R} = 2 \times \frac{b}{2R} \times \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

両辺に $2aR$ をかけて整理すると，

$$b^2 - c^2 = 0$$

因数分解して

$$(b+c)(b-c) = 0$$

$b > 0,\ c > 0$ より $b + c \neq 0$ なので，両辺 $b + c$ で割れば,

$$b - c = 0$$

つまり,

$$b = c$$

逆に $b = c$ ならば，上の変形を逆にたどることによって，等式

$$\sin A = 2\sin B\cos C$$

を得る。

ゆえに,

$\triangle$ ABC は $b = c$ なる二等辺三角形　$\cdots$ **(答)**

(解答例終)

補注　もちろん与えられた三角形が正三角形である可能性は否定できません。しかし正三角形は二等辺三角形であること，a についての情報が何もないことから，ひとまずこの結論で間違いありません。 **(補注終)**

練習 165 △ABC において，$a\cos B - b\cos A = c$ が成り立つとき，この三角形はどんな三角形か。

練習 166 △ABC において，$(b - c\cos A)\sin A = (a - c\cos B)\sin B$ が成り立つとき，この三角形はどんな三角形か。

15.5 図形の計量

三角比の応用例をもう少し紹介しましょう。

15.5.1 三角形の面積

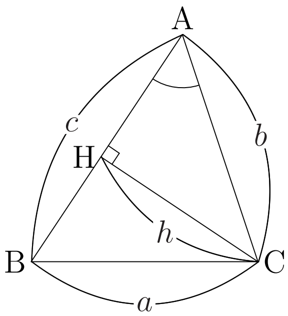
三角比を応用することで計算できるのは，三角形の面積です。
三角形の面積については小学校のときに，

$$(\text{三角形の面積}) = (\text{底辺}) \times (\text{高さ}) \div 2$$

という公式を学習していますが，これを三角比を用いて書き直しましょう。
頂点 C から対辺 AB に下ろした垂線の足を H とし，CH$= h$ とすると，AB$= c$ が底辺，h が高さになります。
つまり△ABC の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}ch$$

です。
下の図を見てください。まずは鋭角三角形の場合です。



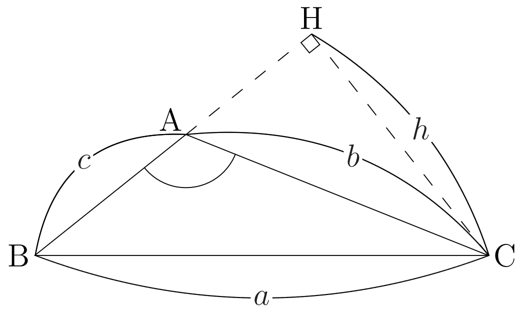
このとき，

$$h = b\sin A$$

となっています。これを上の式に代入すれば，

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A$$

となります。
角 A が鈍角の場合は，下のような図になります。



このとき

$$h = b\sin(180^\circ - A) = b\sin A$$

なので，やはり

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A$$

となります。

A が直角の場合に，

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A$$

が成り立っていることは，明らかです。

問 95 これを確かめてください。

また，A，B，C などの役割を入れ換えても同様のことが成り立ちます。

よって次の定理が得られます。

定理 (三角形の面積) △ABC の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

注意 非常に対称性のいい美しい式ですね。式の特徴をつかんで，正確に覚えてください。ちなみにこの場合も「二辺夾角」になっていますね。 **(注意終)**

例 △ABC において $b = 2,\ c = 3,\ A = 60^\circ$ のとき，面積 S は，

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(例終)

練習 167 $a = 7,\ b = 4,\ C = 135^\circ$ なる△ABC の面積 S を求めよ。

もう一度,「正弦定理」などの復習をしましょう。

例題 53 $\triangle$ABC の面積を S，外接円の半径を R とするとき，

$$S = \frac{abc}{4R}$$

が成り立つことを証明せよ。

解説　しつこいですが,「正弦定理」は次のような等式です。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

ここで，R は$\triangle$ABC の外接円の半径です。
　一方$\triangle$ABC の面積 S は，

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

このどれを用いても構わないのでした。ここでは，はじめの

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A$$

を用いましょう。
　正弦定理の

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

から，

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

です。これを面積の公式に代入すれば，証明すべき式が得られます。

解答例　「正弦定理」より，

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

　よって，

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc \times \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

(解答例終)

練習 168 $\triangle$ABC の面積を S，外接円の半径を R とするとき，

$$S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$$

が成り立つことを証明せよ。

　いずれの式も対称性のいい，美しい式ですね。

15.5.2 ヘロンの公式

まずは，次の例題をやりましょう。

例題 54 三辺の長さが $a = 9,\ b = 7,\ c = 8$ である△ ABC の面積 S を求めよ。

解説 △ ABC の面積は，

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

で計算できました。つまり二辺の長さと，その間の角の正弦の値がわかればいいわけです (「角の正弦」であって,「角の大きさ」とは言っていないことに注意してください)。

しかし三辺の長さがわかっているからといって，一つの角の正弦がすぐわかるわけではありません。ちょっと困りましたね。

そこで少し前にやった例題を思い出しましょう。三辺の長さを与えて，一つの角の大きさを求めよ，という問題です。

このような問題のときには,「余弦定理」をちょっと変形した

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

という式を用いて $\cos A$ の値を計算しました。

あのときの例題は，この値を与えるような角がすぐに見つかったので，A の値を答えることができました。しかし今の場合角の大きさは必要ではありません。必要なのは $\cos A$ の値です。

そして $\cos A$ の値がわかれば，$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ という公式を用いて $\sin A$ の値を計算することができます。

解答例 「余弦定理」より，

$$\cos A = \frac{7^2 + 8^2 - 9^2}{2 \times 7 \times 8} = \frac{32}{112} = \frac{2}{7}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ より $\sin A > 0$ なので,

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

よって,

$$S = \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \times \frac{3\sqrt{5}}{7} = 12\sqrt{5}\ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

補注　上の解答例では $\cos A$ の値を計算しましたが，別にこれでなければいけないわけではありません。試しに，$\cos B$ や $\cos C$ の値を出し，これから面積を計算してみてください。 **(補注終)**

練習 169 三辺の長さが $a=5,\ b=7,\ c=6$ である△ABC の面積 S を求めよ。

このようにすれば三辺の長さが与えられたとき，いつでも三角形の面積を計算することができます。

しかしいつも，cos の値から sin の値を計算するのはちょっと面倒です。この部分を裏に隠した次の定理を覚えておくと，計算が少し楽になります (結構大きな値の平方根を計算することになるので，上手に計算しないと簡単，とはいかないかもしれませんが)。

定理 (ヘロンの公式)　△ABC の面積を S とする。さらに $2s=a+b+c$ とするとき，　**ヘロンの公式**

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

証明　三角形の面積は，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A \quad \cdots(*)$$

で計算できた。

一方，

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

だったので，

$$\begin{aligned}
\sin^2 A &= 1-\cos^2 A\\
&=(1+\cos A)(1-\cos A)\\
&=\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\\
&=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\times\frac{(a^2-(b-c)^2)}{2bc}\\
&=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2}
\end{aligned}$$

ここで $2s=a+b+c$ とすると，

$$b+c-a=2(s-a),\quad a-b+c=2(s-b),\quad a+b-c=2(s-c)$$

よって，

$$\sin^2 A=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ より，$\sin A > 0$。ゆえに，

$$\sin A = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$$

これを $(*)$ に代入すると，

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(証明終)

例　三辺の長さが $a = 9,\ b = 7,\ c = 8$ である△ABC の面積 S を計算してみましょう。

$2s = a + b + c$ ですから，

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+7+8}{2} = 12$$

よって，

$$S = \sqrt{12 \times (12-7) \times (12-9) \times (12-8)} = \sqrt{12 \times 3 \times 5 \times 4} = 12\sqrt{5}$$

(例終)

注意　最後の

$$\sqrt{12 \times 3 \times 5 \times 4} = 12\sqrt{5}$$

で，根号の中身である $12 \times 3 \times 5 \times 4$ を計算してしまうのは，上手な方法ではありませんね。$12 = 3 \times 4$ であることから，$3^2 \times 4^2$ を先に根号の外に出してしまう方がいいでしょう。すると根号の中に残るのは 5 だけで，ほとんど暗算で計算できます。　**(注意終)**

練習 170 三辺の長さが $a = 5,\ b = 7,\ c = 6$ である△ABC の面積 S を,「ヘロンの公式」を用いて計算せよ。

15.6　さらに勉強するために

本章の後半,「正弦定理」や「余弦定理」などのところで，三角形の合同条件との関係を強調して説明をしてみましたがどうだったでしょう。少しでも公式を覚えやすくするための一助としてやってみました。

三角比は，最も現実への応用範囲が広い内容になっています。実際，この概念を用いることによって，遠く離れた星までの距離を計算したりすることができます (天文学の教科書などを参照)。

また，地図を作るとき測量をしますが，何を測っているのかといえば2点間の距離と角度です。

後の章で，三角比をさらに拡張した三角関数の概念を紹介しますが，電気や電波を安全に利用できるのは，これらの考え方があるからです。つまり，三角関数は自然を表現するときに必要な基本的な関数の一つになっています。