補 講8　二重根号

8.0　はじめに

大分後のことになりますが,「二重根号」の計算を使ったお話をしたいので，準備としてここに解説しておきます。

8.1　二重根号とは

$\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ のような数を **二重根号** といいます。 **二重根号**

二重根号は，いつでも簡単になるわけではありません。ここでは，簡単になる特殊な状況の二重根号のみ扱います。

8.2　二重根号のはずしかた

$\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ は，次のようにすると外側の根号がはずれます。

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{6}+2 = 5+\sqrt{6}$$

今，$\sqrt{3}+\sqrt{2} > 0$ より，

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

この説明だけでは，とうていどうやったらいいのかわからないと思います。実際，いきなり $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ なんてものを持ち出していますが，これはどうやったら見つかるのでしょう？

そこがこの話のポイントですね。さて，どうやったらいいのでしょう。

次の定理を見てください。

定理 (二重根号)

$$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}, \quad \sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$$

ただし，後の式においては $a > b$ とする。

証明

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+2\sqrt{ab}+b = (a+b)+2\sqrt{ab}$$

で，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$。よって，

$$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

また，

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-2\sqrt{ab}+b=(a+b)-2\sqrt{ab}$$

で，$a>b$ より，$\sqrt{a}>\sqrt{b}$ なので，$\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$。よって，

$$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

(証明終)

補注　後半の式に $a>b$ という仮定がついていることにご注意。証明の中でこの仮定をちゃんと使っています。

$\sqrt{a}$ の定義が,「2 乗すると a となる **正の** 数」となっているので，$\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$ を示すために使われています。

また，二重根号の内側の根号の前に，2 がついていることにも注意してください。これがないときには，外側の根号がはずれないことがあります。

この定理から，二重根号に現れる二つの数が，ある二つの数の和と積になっているときに簡単になることがわかります。 **(補注終)**

8.3　具体例

では定理の使い方を，具体的な例で説明しましょう。

例　先の $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ において，かけて 6，足して 5 になる数は，2 と 3 です[1]。よって，

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

(例終)

例　$\sqrt{7-\sqrt{24}}$

この式の内側の根号の前には 2 がありません。よってこのままでは，外側の根号をはずすことはできません。

しかし $\sqrt{28}=2\sqrt{6}$ ですから，

$$\sqrt{7-\sqrt{24}}=\sqrt{7-2\sqrt{6}}$$

[1]同じようなフレーズをどこかで聞いたことがありますね！
そう因数分解のところです !!

かけて6，足して7となる二つの数は，1と6。よって

$$\sqrt{7-\sqrt{24}}=\sqrt{1}-\sqrt{6}=1-\sqrt{6}$$

おっとっと，あわてないで！

この例では，根号内が引き算になっています。ということは，根号をはずしたときの前の数の方が後の数より大きくなければ符号があいません。今 $6>1$ ですから，

$$\sqrt{7-\sqrt{24}}=\sqrt{6}-\sqrt{1}=\sqrt{6}-1$$

となります。 **(例終)**

例 $\sqrt{8+\sqrt{15}}$

この例は，先の例と同じく，内側の根号の前に2がありません。よって，このままでは二重根号をはずすことはできません。そこで，$\sqrt{15}$ を書き直したいのですが，先の例と違って，これはうまくいきません。

ではこの場合は，はずすことは不可能なのでしょうか？

実はそうではありません。与えられた式を次のように変形します。

$$\sqrt{8+\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{16+2\sqrt{15}}{2}}$$

何をしたか，わかりますか？

そう，分母分子に2をかけたんですね。そうすることで (強引に) $\sqrt{15}$ の前に，2をつけたわけです。

$$\sqrt{\frac{16+2\sqrt{15}}{2}}=\frac{\sqrt{16+2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}}$$

で，今度は，分子の二重根号をはずすことができます。先を読む前に，自分で計算してみてください。

よって，

$$\begin{aligned}\sqrt{8+\sqrt{15}} &= \sqrt{\frac{16+2\sqrt{15}}{2}}\\ &= \frac{\sqrt{16+2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{15}+1}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{30}+\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

最後のところで，分母の有理化をしておいてください。 **(例終)**

練習 305 次の式の二重根号をはずして，簡単にせよ。

(1) $\sqrt{13+2\sqrt{22}}$　(2) $\sqrt{20-\sqrt{364}}$　(3) $\sqrt{3+\sqrt{5}}$　(4) $\sqrt{10-4\sqrt{6}}$