補 講11　写像，変換，関数

11.0　はじめに

この章はかなり抽象的な内容になっています。少なくとも高校の数学がすべて終わっていて，大学で学習する数学に少しなれている人を対象とします。

11.1　写　像

集合それ自身のもつ性質にも色々と面白いものがありますが，二つあるいはそれ以上の個数の集合の間の関係には，さまざまな応用があり，また異なって見えるものを統一的に扱う方法が得られます。

みなさんは中学校の数学で 1 次関数を，高校で 2 次関数や三角関数，指数・対数関数など，さまざまな関数を勉強してきています。これらは二つの実数の集合の間の関係，つまりある実数 x に対して別の実数 y を対応させる規則でした。これを抽象化すると **写像** の概念になります。

定義 (写像)　二つの集合 $A,\ B$ があって，A のそれぞれの要素に B の要素がただ一つ対応させる規則が与えられたとき，この対応の規則を A から B への **写像** という。 **写像**
(定義終)

注意　「A のそれぞれの要素に B の要素がただ一つ対応」していることに注意してほしい。つまり A の要素に二つの B の要素を対応させるような規則は「写像」とは考えません。

たとえば A として 0 以上の実数，B を実数とします。「$a \in A$ に対して a の平方根を対応させる」という規則を考えましょう。すると $4 \in A$ であり，4 の平方根は 2 と -2 でしたから，4 に対応する B の要素は二つあることになります。上の定義から，このような対応の規則は写像とは考えません。

また A の要素には例外なく B の要素が対応していなければなりません。

たとえば $A,\ B$ として実数全体の集合をとりましょう。「$a \in A$ に対して a の正の平方根を対応させる」という規則を考えましょう。この規則によって，4 に対しては 2 という数がただ一つ対応しますので，写像になっているように見えますが，-4 には対応する数がありません（B が実数の集合であり複素数の集合ではないことに注意)。よってこの規則も写像ではありません。 **(注意終)**

定義 (写像を表す記号，像)　集合 A から B への写像を，文字 f などを用いて

$$f : A \to B$$

のように表す。

また，写像 f によって，A の要素 a に B の要素 b が対応するとき，

$$f : a \mapsto b, \qquad a \xrightarrow{f} b, \qquad f(a) = b$$

などと表す。このとき，a は f によって b に写されるといい，b を f による a の **像** という。また，$A \supset A'$ に対して，B の部分集合 **像**

$$\{f(a) | a \in A'\}$$

を $f(A')$ と表し，f による A' の**像** という。 **(定義終)** **像**

注意　要素どうしの対応を表す記号のうち，最後の $f(a) = b$ は関数のときにも用いました。

また，f による A' の像とは，A' の要素を f で写したもの全体の集合のことです。

(注意終)

例　写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ と定義するとき，$3 \in \mathbb{R}$ の f による像は 9，$-\sqrt{5} \in \mathbb{R}$ の f による像は 5 になっています[1]。

また，閉区間 $[-1,\ 2] = \{x | -1 \leqq x \leqq 2\}$ の f による像は閉区間 $[0,\ 4]$ です。

さらに，$\mathbb{R}$ の f による像は $\{x | x \geqq 0\}$，つまり 0 以上の実数全体の集合です。

(例終)

---

[1]前半で紹介したように $\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表します。

また下のように $[a,\ b]$ という記号で，$\mathbb{R}$ の部分集合

$$\{x | a \leqq x \leqq b\}$$

を表します（もちろん $a \leqq b$ としています)。これを特に **閉区間** といいます。

同様にして **開区間** $(a,\ b)$ を

$$(a,\ b) = \{x | a < x < b\}$$

で，**半開区間** $(a,\ b]$ を

$$(a,\ b] = \{x | a < x \leqq b\}$$

$[a,\ b)$ も同様に定義します。

さらに

$$(-\infty,\ a) = \{x | x < a\}, \quad [a,\ \infty) = \{x | a \leqq x\}$$

などとも定義し，これらも半開区間といいます

これらの記号は，微分積分のところで常用します。

注意　この例からもわかるように，関数は写像の特別なものとなっています。かなり後の方の章になりますが，2 次の行列は平面から平面への写像の例を与えます。写像という考え方を用いることで，こういったものをある程度統一的に考えることができるようになるのです。 **(注意終)**

定義 (定義域，値域)　$f : A \to B$ を写像とするとき，A を f の **定義域**，$f(A)$ を f の **値域**という。 **(定義終)**　**定義域**　**値域**

注意　2 次関数のところでは $f(x) = x^2 - 3x + 1\ (-2 \leqq x \leqq 3)$ というような形で定義域を示していました。$-2 \leqq x \leqq 3$ が定義域を表しています。 **(注意終)**

例　$f : [-2,\ 3] \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ と定義するとき，定義域は $[-2,\ 3]$，値域は $[0,\ 9]$ です。

　$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$(x,\ y) \mapsto (x + 3,\ y - 2)$$

と定義すると，定義域は $\mathbb{R}^2$，値域も $\mathbb{R}^2$ になっています[2]。

(例終)

　写像というのは，とにかく二つの集合の間に対応関係を考えることによって定まるので，実に色々なものが写像としてとらえることができます。それだけに得体(えたい)の知れないもの，といった感じがつきまとうかもしれません。

　その実体を感じとるには，多くの写像，それも考える意味のある写像の例をたくさん知ることです。高校の内容では，主として関数がそれに当てはまります。また上でも触れたように，行列は数学の中でも深く研究されている写像の一種ですし，実は数列も写像としてとらえることができます。

　実際数列というのは，自然数 n を用いて a_n というように表されるわけですが，これは写像 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ と考えることができます。つまり $f(n) = a_n$ です。もちろんこう考えるだけではまだ新しいことは何も出てきませんが，数列どうしの和や積などを考える（これらは数列の極限のところで出てきますね）ことによってまったく異なると思えるベクトルの概念とが結び付き，ある種の数列の性質を調べるときにベクトルの考え方を適用することができたりするのです。

---

[2] $\mathbb{R}^2$ は

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,\ y) | x,\ y \in \mathbb{R}\}$$

と定義します。つまり二つの実数の組 $(x,\ y)$ 全体です。これは平面上の座標と考えられますので，$\mathbb{R}^2$ は平面であり，この例の写像 F は平面から平面への写像になっています。

　この例のように定義域と，その行き先の集合が同じとき，$f : A \to A$ のような写像を特に **変換** といいます。

先に進む前に，写像の例をいくつか挙げておきます。はじめのいくつかを除いて，進んだ数学ではよく現れるものです。少しずつ慣れていってください。

例　A を日本人全体の集合，B を名字とする。日本人 $a \in A$ に対して，その名字を対応させるという規則は写像である。 **(例終)**

例　A を島根南高校１年１組の生徒全体の集合，B を $\mathbb{R}^4$ とする。$a \in A$ に対して，a さんの身長，体重，座高，胸囲の計測結果で上の数値の組を対応させるという規則は，写像になっている。

この二つは日常意識しないものの，よくやっていることです。確かに写像になっているのですが，数学としてはあまり興味がありません (保健体育的には後者の写像は興味の対象となるでしょうが，写像それ自身というより得られた数値の集まりの平均や，経年変化のほうにより興味があることでしょう)。 **(例終)**

例　上に示したように，関数や変換も写像の一種である。$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$(x,\ y) \mapsto (3x + y,\ -2x + 3y)$$

で定義すると，これは写像である。この写像は行列を用いて定義されたものになっており，**一次変換** と呼ばれる。 **(例終)**　**一次変換**

例　$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(x,\ y) = (x,\ y,\ x^2 + y^2)$$

と定義する。この写像の像は，空間内の曲面になっている。

多変数の微分積分学を応用すると，こういった「図形」の性質を調べることができる。 **(例終)**

例　座標平面から原点を除いた集合を $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ とし，ここから $\mathbb{R}^2$ への写像

$$f : \mathbb{R}^2 - 0 \to \mathbb{R}^2$$

を

$$f(\overrightarrow{x}) = \frac{\overrightarrow{x}}{||\overrightarrow{x}||}$$

と定義する。ここで $||\overrightarrow{x}||$ はベクトル $\overrightarrow{x}$ の大きさである。

この写像の像は，円になっている。 **(例終)**

例　$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を $f(x) = 2x$ と定義する。この写像の像は偶数全体になっている。
(例終)

例　2 次の正方行列全体の集合を $M(2,\ 2)$ と表す。$\det : M(2,\ 2) \to \mathbb{R}$ を

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

と定義する。これは 2 次正方行列の行列式を対応させるものである。この関数では，値が 0 にならないもの，あるいは値が 1 になるものが面白い。かなり後のほうの章で取り上げるが，行列式が 0 でない行列には「逆行列」という行列を考えることができ，数の割り算に相当することが可能になる。　**(例終)**

例　任意の空でない集合 A を考える。A から A の写像を $a \in A$ に対して a 自身を対応させることで定義する。この写像 $A \to A$ は何もしていないので，意味がないように感じられるかもしれないが，実は色々と使える。これを A の **恒等**(こうとう) **写像** といい，Id_A などと表す。つまり $\mathrm{Id}_A : A \to A$ は　**恒等写像**

$$\mathrm{Id}_A(a) = a$$

(例終)

11.2　単射，全射，全単射

写像に関する性質に少し触れましょう。

定義 (単射，全射，全単射)　写像 $f : A \to B$ は，

$$a_1 \neq a_2 \text{ ならば } f(a_1) \neq f(a_2)$$

を満たすとき **単射**(たんしゃ) あるいは **1 対 1** であるという。　**単射**

また，任意の $b \in B$ に対して A の要素 a で $f(a) = b$ となるものが存在するとき **全射**(ぜんしゃ) あるいは**上への写像** であるという。　**1 対 1**　**全射**

さらに，全射であると同時に単射であるものを **全単射** であるという。**(定義終)**　**上への写像**　**全単射**

注意

(1) 昔の教科書では「1 対 1」,「上への」ということばが使われていました。この上に全単射を表す用語として「1 対 1 の対応」という表し方も紹介されていました。これらの表現は紛らわしいので，本書では「単射」,「全射,「全単射」ということばを使うことにしました。

(2) 単射の定義に出てきた

$$a_1 \neq a_2 \text{ ならば } f(a_1) \neq f(a_2)$$

の対偶をとると

$$f(a_1) = f(a_2) \text{ ならば } a_1 = a_2$$

となります。与えられた写像が単射であることを示すときには，こちらを使うことが多いでしょう。これについては後で例を挙げましょう。
また全射の定義「任意の $b \in B$ に対して A の要素 a で $f(a) = b$ となるものが存在する」はちょっとわかりにくいですね。要は，いった先の集合 B のどの要素にも，そこに写ってくる A の要素がある，ということです。これは言い替えると f による A の像が B に等しい，ということでもあります。

(注意終)

例　1次関数 $y = 3x + 2$ を考えましょう。これは $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像と考えることができます。この写像は単射です。実際，

$$3a_1 + 2 = 3a_2 + 2$$

とすると，両辺から 2 を引いて

$$3a_1 = 3a_2$$

両辺を 3 で割って，

$$a_1 = a_2$$

よって上で触れた対偶がいえましたので，単射であることが結論できます。
また1次関数は全射でもあります。実際，任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して，方程式

$$3x + 2 = b$$

を解くことができます。実行すると

$$x = \frac{b-2}{3}$$

であり，$3x + 2$ の x にこれを代入して計算すれば b になります（確かめてください)。ゆえに全射であると結論できます。
以上のことから1次関数 $y = 3x + 2$ は全単射です。
より一般的に，どんな1次関数 $y = ax + b$ も全単射になっていることが結論できます（確かめてください)。 **(例終)**

例　3次関数 $y = x^3 - x + 3$ は全射ですが，単射ではありません。
実際，どんな3次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ も実数解をもつので，全射であることがわかります[3]。

[3] これは受験生には常識の事実ですね。より一般に,「任意の奇数次の代数方程式は実数解をもつ」ことが示せます。証明?　関数のグラフを見てください。より厳密には極限の考え方と，中間値の定理を使います。このシリーズの最後のほうで，証明を与えましょう。

単射でないことは，$x=-1,\ 0,\ 1$ のときの y の値はいずれも 3 であることからわかります。 **(例終)**

例　$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ を $f(n)=2n$ と定義すると，この写像は単射ですが，全射ではありません。
実際，$f(n)=f(m)$ ならば

$$2n=2m$$

より $n=m$ を得ます。よって単射。
しかしたとえば値が 3 になるような $\mathbb{Z}$ の要素はありません。よって全射ではありません。 **(例終)**

先の節の終わりに与えた写像の例を，単射になっているもの，全射になっているもの，全単射になっているものと分類してみてください。

11.3　写像の合成

二つの写像 $f:A\to B,\ g:B\to C$ を考えましょう。まず f によって $a\in A$ に $f(a)\in B$ が対応します。$f(a)$ は B の要素ですから，g によってさらに写すことができ，$f(a)$ には $g(f(a))$ が対応します。
以上のことから A から C への新しい写像

$$a\mapsto g(f(a))$$

を作ることができます。

定義 (合成写像)　二つの写像 $f:A\to B,\ g:B\to C$ に対して，

$$a\mapsto g(f(a))$$

によって定まる写像を f と g の **合成** といい，　**合成**

$$g\circ f$$

と表す。つまり

$$(g\circ f)(a)=g(f(a))$$

である。 **(定義終)**

例　二つの変換

$$F:(x,\ y)\mapsto(x-1,\ y+2),\quad G:(x,\ y)\mapsto(x+3,\ y+1)$$

に対して[4] $G \circ F$ は,

$$(x,\ y) \mapsto (x-1,\ y+2) \mapsto ((x-1)+3,\ (y+2)+1)$$

すなわち

$$(x,\ y) \mapsto (x+2,\ y+3)$$

となる。 **(例終)**

注意 二つの変換が $f : A \to A,\ g : A \to A$ 与えられているときには $g \circ f$ と $f \circ g$ の二種類の合成を考えることができますが，一般にはこれらは等しくありません。 **(注意終)**

例 $F : (x,\ y) \mapsto (2x,\ y),\ G : (x,\ y) \mapsto (x+1,\ y-1)$ とするとき，

$$G \circ F : (x,\ y) \mapsto (2x+1,\ y-1)$$

ですが，

$$F \circ G : (x,\ y) \mapsto (2x+2,\ y-1)$$

なので，$G \circ F$ と $F \circ G$ は等しくありません（確かめてください）[5]。

しかし上に挙げた例では $G \circ F$ と $F \circ G$ は等しくなっています（確かめてください）。 **(例終)**

f や g が関数のときには，合成写像のことを **合成関数** といいます。 **合成関数**

11.4 逆写像

11.4.1 逆写像

全単射 $f : A \to B$ を考えましょう。

この写像は， A の要素 a に B の要素 $f(a)$ を対応させるものです。しかし今 f は全射ですから，B のどの要素 b に対しても $f(a) = b$ となる $a \in A$ が少なくとも一つあります。また f は単射なので，このような a はただ一つしかありません。つまり f が全単射なら，どんな $b \in B$ に対しても，$f(a) = b$ となるただ一つの $a \in A$ が見つけられます。

これから新しい写像 $g : B \to A$ を作ることができます。

定義 (逆写像) $f : A \to B$ を全単射とする。$b \in B$ に対して，上のようにして見つかる $a \in A$ を対応させる規則は写像になる。この写像を f の **逆写像** といい， **逆写像**

[4]これらは平面上の平行移動になっています。

[5]ちなみに二つの写像 $f,\ g : A \to B$ が等しいとは，すべての $a \in A$ に対して $f(a) = g(a)$ となることです。
つまり一つでも等しくない値があるときには，二つの写像は等しくありません。

f^{-1} とあらわす。f^{-1} は「えふいんばーす」と読む。 **(定義終)**

例　変換 $F:(x,\ y)\mapsto(x-1,\ y+2)$ は全単射なので，逆写像があり (確かめてください)，

$$F^{-1}:(x,\ y)\mapsto(x+1,\ y-2)$$

です (これも確かめてください)。 **(例終)**

$f:A\to B$ が全単射のとき，f と f^{-1} の合成について次が成り立ちます。

$$\begin{aligned}f^{-1}\circ f &= \mathrm{Id}_A\\ f\circ f^{-1} &= \mathrm{Id}_B\end{aligned}$$

この関係式によって逆写像を特徴づけることができます。

定理 (逆写像の存在)　$f:A\to B$ に対して $g:B\to A$ で，

$$\begin{aligned}g\circ f &= \mathrm{Id}_A\\ f\circ g &= \mathrm{Id}_B\end{aligned}$$

を満たすものが存在するとき，f は全単射であり，$f^{-1}=g$。

証明　任意の $b\in B$ に対して $g(b)\in A$ であり，

$$f(g(b))=(f\circ g)(b)=\mathrm{Id}_B(b)=b$$

よって f は全射。

次に $a,\ a'\in A$ に対して $f(a)=f(a')$ とする。このとき $g(f(a))=g(f(a'))$ だが，$g\circ f=\mathrm{Id}_A$ より $a=a'$ を得る。よって f は単射。つまり f は全単射。

また逆写像の定義から g が f^{-1} に等しいことは明らか。 **(証明終)**

例　二つの変換

$$\begin{aligned}F &: (x,\ y)\mapsto(3x+y,\ 2x+y)\\ G &: (x,\ y)\mapsto(x-y,\ -2x+3y)\end{aligned}$$

について，

$$\begin{aligned}(G\circ F)(x,\ y) &= G(3x+y,\ 2x+y)\\ &= ((3x+y)-(2x+y),\ -2(3x+y)+3(2x+y))\\ &= (x,\ y)\end{aligned}$$

なので $G\circ F=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$。同様にして $F\circ G=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ が示せる (確かめてください) ので，F は全単射で $F^{-1}=G$。 **(例終)**

11.4.2　逆関数

写像が特に関数のとき，**逆関数** といいます。　**逆関数**

例　$y = 3x + 2$ は全単射でした。よって逆関数が存在します。
実際，この式を x について解くと，

$$x = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}$$

であり，これが求める逆関数になっています。つまり定理「逆写像の存在」の関係式

$$\begin{aligned} g \circ f &= \mathrm{Id}_A \\ f \circ g &= \mathrm{Id}_B \end{aligned}$$

が成り立ちます (確かめてください)。　**(例終)**

注意　普通は

$$x = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}$$

の x と y を入れ替えた

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

を $y = 3x + 2$ の逆関数としています。
数学的には前者でも問題ないのですが，独立変数を x にとるのが習慣なので，このような書き換えをするようです。　**(注意終)**