補 講12　連立２元１次方程式の解法

12.0　はじめに

本補講では，連立２元１次方程式の解の公式に相当するものを紹介します。

以下の議論は文字式だけによるもの，つまり代数的なものです。それゆえこういった扱いに慣れていないものにとっては，かなり錯綜（さくそう）しているように見えて，嫌になるかもしれません。しかし将来理工系に進もうと考えている人は必ず読み，理解しておいてほしい。

実は同じことを本文で幾何的な方法でやって見せました。これは厳密な方法とは言いがたいのですが，分かったような気にさせてくれることでしょう。これら二つの方法をよく比較し，いずれの方法も自分のものとしてください。

12.1　連立２元１次方程式

連立方程式

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$$

について考えます[1]。また $a,\ b,\ c,\ d$ のいずれかが０の場合は話が面倒になるので，まずはどれも０でないと仮定して議論し，後でそれぞれが０の場合を議論することにします。

さて，この方程式を具体的な数値を係数に持つような方程式と同じようにして解いていきましょう。

これは，先に１元１次方程式 $ax+b=0$ が解 $x=-\dfrac{b}{a}$ を持ち，それ以外にないことを示した際に「この方程式が解を持つと仮定すると」として議論したプロセスに相当します。１元１次方程式のときには式の変形がすべて同値変形だったので特に言いませんでしたが，このプロセスは，方程式 $ax+b=0$ が解を持つとするとそれは $x=-\dfrac{b}{a}$ の形をしていることを示したことになるので,「方程式 $ax+b=0$ が解を持つための必要条件」ということがあります。

[1]先の連立２元１次方程式の定義と式の形と未知数の係数が少し変わっていることに注意してほしい。これは以下の議論がやりやすいようにしたものであって，それ以上の意味はありません。もちろん連立方程式の定義の式と上のものは同値です (確かめよ！)。よってどちらで議論しても構いません。

これにならっていうなら，方程式

$$\begin{cases} ax + by = p & \cdots\cdots \quad (1) \\ cx + dy = q & \cdots\cdots \quad (2) \end{cases}$$

が解を持つための必要条件を求める，平たく言えばこの方程式が解を持つとしたらどのような形をしていなければならないのかをまず調べよう，というわけです。

では実際に解いてみましょう。連立方程式の解き方には二つの方法——加減法と代入法——がありましたが，ここでは加減法を用いましょう。

どちらの未知数を消去しても同様の結果が得られるので，ここでは x を消去しましょう。そのためには係数をそろえなければいけません。同じ係数にするには (1) の両辺に d，(2) の両辺に b をかければいいですね。

実行すると，

$$\begin{cases} adx + bdy = dp & \cdots\cdots \quad (3) \\ bcx + bdy = bq & \cdots\cdots \quad (4) \end{cases}$$

辺々(へんぺん)引く[2] と，

$$(ad - bc)x = dp - bq \qquad \cdots\cdots \quad (5)$$

これによって x だけの方程式ができたので両辺を $ad - bc$ で割れば，x を求めることができます。しかしこれを無造作(むぞうさ)にやってはいけません。というのは，四つの定数 a, b, c, d の値によっては $ad - bc$ の値が 0 になる (そのような例を後で与えましょう) からです。

そこで議論が大分複雑になりますが，見通しをよくするために $ad - bc \neq 0$ という条件を付け加えましょう ($ad - bc = 0$ となる場合については後で扱います)。

$ad - bc \neq 0$ を仮定すると，両辺を $ad - bc$ で割ることができて，

$$x = \frac{dp - bq}{ad - bc}$$

[2]「辺々引く」とは上下の右辺どうし，上下の左辺どうしで引き算をする，ということです。すなわちまず二つの等式

$$a = b$$
$$c = d$$

に対して $a - c$, $b - d$ を作る。そしてこの計算の結果が等号で結べる，つまり

$$a - c = b - d$$

が成り立つことが等式の性質を用いることで証明できます (証明せよ !!)。

このように，二つの等式

$$a = b$$
$$c = d$$

から

$$a - c = b - d$$

を作ることを「辺々引く」といいます。

を得ます。

後はこれを (1) あるいは (2) に代入して整理すれば y に関する方程式が得られます。どちらに代入しても同じ[3] なので (1) に代入すると，

$$a \times \frac{dp - bq}{ad - bc} + by = p$$

左辺の第一項を移項して

$$by = p - \frac{a(dp - bq)}{ad - bc}$$

右辺を通分して整理する (必ず自分でも計算せよ！) と

$$by = \frac{b(aq - pc)}{ad - bc}$$

よって[4]

$$y = \frac{aq - pc}{ad - bc}$$

以上をまとめると次の定理を得ます。

定理 (連立２元１次方程式の解の公式)　連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

は $ad - bc \neq 0$ ならば解けて，解は

$$x = \frac{dp - bq}{ad - bc}, \qquad y = \frac{aq - pc}{ad - bc}$$

注意　連立方程式を解く方法には充分慣れていることでしょうから，この解の公式は覚える必要はありません[5]。この公式の良さは，一般の場合にも同じような形の結論が得られることです。それについては，大学で「線形代数学」という科目で知ることができます。 **線形代数学**

(注意終)

さて $ad - bc = 0$ のときにはどうなるでしょう？

それを明らかにするために，この式を少し変形します。

まず bc を移項すると

$$ad = bc$$

[3]元に戻って x を消去した方が少し簡単です。試みてください。

[4]$b \neq 0$ という仮定が使われていることに注意。

[5]実は簡単に覚える方法があります。それについては，本書の最後のほうで紹介できるでしょう。

両辺を cd で割ると[6]

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

となります。

この最後の式は $a:c$ と $b:d$ という二つの比が等しいこと，この共通する比の値を k とでもすると，

$$\frac{a}{c}=k, \qquad \frac{b}{d}=k$$

より

$$a=ck, \qquad b=dk$$

という式が得られます (k の値は 0 ではないことに注意！　なぜか？　理由を考えよ！)。

これを元の方程式

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$$

の第一式に代入すると

$$ckx+dky=p$$

となります。つまり元の方程式は

$$\begin{cases} ckx+dky=p \\ cx+dy=q \end{cases}$$

となるわけです。

二番目の式の両辺に k をかけて辺々引くと

$$0=p-kq$$

が得られます。ここでもし右辺の値 $p-kq$ が 0 でないとするとこれは矛盾。つまり「解はない」。

一方 $p-kq$ の値が 0 なら $p=kq$ となり，第一式 $ckx+dky=p$ に代入すると

$$ckx+dky=kq$$

となります。上で注意したように $k\neq 0$ なので両辺を k で割ると

$$cx+dy=q$$

となり，これは第二式と同じです。

[6] $a,\ b,\ c,\ d$ は 0 でないという仮定がありました。よって特に c と d が 0 でないので $cd\neq 0$。つまり cd で割ってかまいません。

今後はこういったことは一々断らないことにします (解答例では別だが)。文字式で割るときには注意し，割っても構わないことを各自確認しながら読む習慣をつけてほしい。

それから「$a,\ b,\ c,\ d$ は 0 でない」という仮定がここではじめて用いられたことにも注意してほしい。つまり実は $ad-bc\neq 0$ のときには，この仮定は不要だったのです。

つまり式は見掛け上二つあったのですが，実質的には一つであったということです。

１次方程式 $cx + dy = q$ の解が無数にあることは先の節で説明した通りです。よって解は「$cx + dy = q$ を満たす $(x,\ y)$ すべて」ということができます。

以上をまとめると次のようになります。

定理 (連立２元１次方程式の解の公式—その 2)　連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

は $ad - bc = 0$ ならば ($\dfrac{a}{c} = k$ とおく (あるいは $\dfrac{b}{d} = k$ とおいてもよい。これらは等しかった) とき)

(１) $p - kq \neq 0$ ならば解なし。

(２) $p - kq = 0$ ならば方程式 $cx + dy = q$ を満たす $(x,\ y)$ がすべての解。

ここまでは $a,\ b,\ c,\ d$ のいずれも 0 でない，という仮定の下(もと)で議論してきました。

以下では今少し特別な場合を考えましょう。どのような場合があるのかを考えてみると，

(1) $a,\ b,\ c,\ d$ のうち一つだけが 0 の場合

(2) $a,\ b,\ c,\ d$ のうち二つだけが 0 の場合

(3) $a,\ b,\ c,\ d$ のうち三つが 0 の場合

の三つであることがすぐに分かります。

このうち (３) はあり得ません。なぜなら $a,\ b,\ c,\ d$ のうち三つが 0 ということは，たとえば a と b と c の三つが 0 ということですが，この場合は $ax + by = p$ の二つの係数 $a,\ b$ が 0 になってしまい，２元１次方程式の元々の定義に反します。他の三つが 0 の場合を考えても同様です。

問 183 他の三つが 0 の場合でも同様であることを確かめよ (上の場合も含めて何通りあるかも考えよ)。

それでは (１) について検討しましょう。

どれが 0 でも同じなので，a が 0 の場合を考え，残りの場合は皆さんにお任せすることにします。

このとき元の方程式は

$$\begin{cases} by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

となります。

今 b は 0 でないので，第一式は y について解くことができて

$$y = \frac{p}{b}$$

これを第二式に代入すると x の値が得られます。

問 184 これを実行し，x の値を求めよ。

さて，今 a だけが 0 の場合を考えましたが，これを先の $ad - bc$ で考えると

$$ad - bc = bc$$

となり，この値は今の仮定より 0 ではありません。つまり先の定理「連立２元１次方程式の解の公式ーその 1」(662 ページ) の仮定が満たされていることになります。

試みに定理「連立２元１次方程式の解の公式ーその 1」で得られた公式に $a = 0$ を代入してみると，上と同じ値を得ます。

問 185 上のことを確かめよ。

他の係数が 0 の場合も同様です。

問 186 確かめよ。

よって定理「連立２元１次方程式の解の公式ーその 1」はいずれかの係数が一つだけ 0 の場合でも通用することが分かりました。

続けて (2) の場合を検討しましょう。

二つの係数が 0 となるのはいくつかの場合がありますが，たとえば a が必ず 0 になる場合を考えると，$a = 0,\ b = 0$ と，$a = 0,\ c = 0$ と，$a = 0,\ d = 0$ の三つの場合があります。

このうち第一のものは先と同じ理由からあり得ません。よって後の二つの場合を検討すればよいことになります。

(イ) $a = 0,\ c = 0$ の場合

元の方程式は

$$\begin{cases} by = p \\ dy = q \end{cases}$$

となります。これで解が得られたと思いたいのですが，四つの数 $b,\ p,\ d,\ q$ の関係によって状況は変わるのできちんと調べる必要があります。

それを明らかにするために第二式を解くと

$$y = \frac{q}{d}$$

これを第一式に代入すると

$$\frac{b}{d}q = p$$

つまり

$$p - \frac{b}{d}q = 0$$

先にも同じような状況があり，左辺が 0 かどうかが問題になります。そのときの結果をもう一度書くなら，

（1）$p - kq \neq 0$ ならば解なし。

（2）$p - kq = 0$ ならば方程式 $cx + dy = q$ を満たす $(x,\ y)$ がすべての解。

でした ($\frac{b}{d} = k$ とおいてもよかったことに注意してください)。

今の場合 $ad - bc$ は 0 であることにも注意。

(ロ) $a = 0,\ d = 0$ の場合

この場合元の方程式は

$$\begin{cases} by = p \\ cx = q \end{cases}$$

となります。

これはそれぞれを解けばよく，

$$x = \frac{q}{c}, \quad y = \frac{p}{b}$$

を得ます。

この場合 $ad - bc$ は 0 ではなく，先の解の公式で $a = 0,\ d = 0$ とすると上の解

$$x = \frac{q}{c}, \quad y = \frac{p}{b}$$

を得ます。

以上ですべての場合の検討が完了しました。

ここまでの説明で気がついていると思いますが，連立方程式の係数 $a,\ b,\ c,\ d$ がどのような状況にあろうとも $ad - bc$ という値が解の様子をかなり反映しています。いやそれどころかこの値が 0 かどうかが連立方程式が解ける鍵を握っているのです。

実際以上のことは次の定理にまとめることができます。

定理 (連立方程式の解)　連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

は

(１) $ad-bc\neq 0$ なら解けて，解は

$$x=\frac{dp-bq}{ad-bc}, \qquad y=\frac{aq-pc}{ad-bc}$$

(２) $ad-bc=0$ のときは，$k=\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ とするとき
(イ) $p-kq\neq 0$ ならば解なし (不能)。
(ロ) $p-kq=0$ ならば方程式 $cx+dy=q$ を満たす $(x,\ y)$ がすべての解 (不定)。

問 187 上の定理の逆
「連立方程式

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$$

がただ一つの解を持てば $ad-bc\neq 0$ 」
を証明せよ。

以上の二つを合わせると

定理 (連立２元１次方程式がただ一つの解を持つための必要十分条件) 連立方程式

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$$

がただ一つの解をもつための必要十分条件は $ad-bc\neq 0$。

次の問いはかなり手間がかかるでしょう。しかし取り組むだけの価値はあります。

問 188 連立３元１次方程式についてもこの節と同様の議論ができ，上と同様の定理が得られる。研究せよ。
(**ヒント：** まず $ad-bc$ に相当する量をつきとめよ。)