補 講14　15° の三角比，36°，18° の三角比

14.0　はじめに

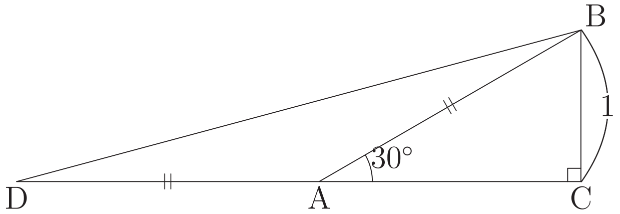
本文では，30°，45°，60° が簡単にわかったので，これらの値を何度も使いました。しかしちょっと工夫すると，これら以外の角度の三角比も計算できます。それが表題の 15° の三角比，36°，18° の三角比です。

14.1　15° の三角比

$\angle A = 30^\circ$，$\angle C = 90^\circ$ の直角三角形 ABC を考えます。この直角三角形で，線分 AC を頂点 A の方向へ延長し，AB=AD となる点 D をとります。

計算を簡単にするために，BC$= 1$ としましょう。

すると，下の図のようになります。



「内対角の和は，外角に等しい」ので，

$$\angle \mathrm{BDA} + \angle \mathrm{DBA} = \angle \mathrm{BAC}$$

であり，三角形 ABD は二等辺三角形ですから，

$$\angle \mathrm{BDA} = \angle \mathrm{DBA}$$

ゆえに

$$2\angle \mathrm{BDA} = \angle \mathrm{BAC} = 30^\circ$$

よって，

$$\angle \mathrm{BDA} = 15^\circ$$

となります。

さて，BC$=1$ としましたので，BA$=2$, AC$=\sqrt{3}$ であり，BA=DA なので，DC$=2+\sqrt{3}$ となります。ゆえに「三平方の定理」より，

$$\mathrm{DB}=\sqrt{1^2+(2+\sqrt{3})^2}$$

根号の中を計算すると，

$$\mathrm{DB}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}$$

二重根号が現れました。これについては，いつでも簡単になるというわけではありませんが，できる場合について先の補講で計算方法が与えられています。今の場合，

$$\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}$$

と変形でき，幸いにしてこれは二重根号のはずれるタイプです。実行すると，

$$\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

つまり，

$$\mathrm{DB}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

これから，$\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$, $\tan 15^\circ$ は簡単に計算でき，

$$\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
$$\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$$

であることがわかります。

補注　後で「半角の公式」と呼ばれる公式を用いて $\sin 15^\circ$ などを計算してみせましょう。当然のことながら，結果は同じになります。 **(補注終)**

14.2　36°, 18° の三角比

次に 36°, 18° の三角比を求めてみましょう。

頂角が 36° の二等辺三角形 ABC を考えます。

底角 B の二等分線と辺 AC の交点を D，D から辺 AB に下ろした垂線の足を E としましょう。

また，計算しやすいように，BC$=2$ とします。

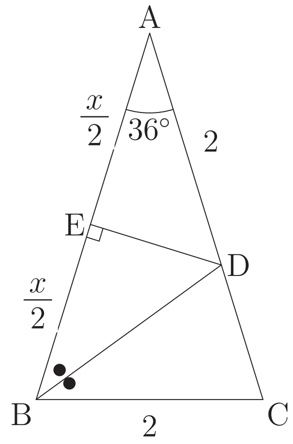


図 14.1: 36° の三角比

すると，図 14.1 のようになります。

さて，△ ABC は二等辺三角形なので底角は等しく，頂角 A が 36° だったので，

$$\angle \mathrm{B} = (180^\circ - 36^\circ) \div 2 = 72^\circ$$

です。

よって $\angle$CBD$= 72^\circ \div 2 = 36^\circ$ となります。また，$\angle$DBE も 36° になっていることに注意しましょう。

次に △ ABC と △ BCD において，

$$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{CBD} \quad (\text{いずれも } 36^\circ)$$

であり，また，

$$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{BCD} \quad (\text{共通})$$

なので，

$$\triangle\,\mathrm{ABC} \backsim \triangle\,\mathrm{BCD} \quad (\text{二つの角})$$

となります。今△ ABC は二等辺三角形でしたから，△ BCD も二等辺三角形になります。

また，上に見たように $\angle$DBE$= 36^\circ$ なので，△ DAB は DA=DB なる二等辺三角形になります ($\angle$A$= 36^\circ$ だったことと，二つの角が等しい三角形は二等辺三角形だったことを思い出してください)。

以上のことから，

$$\mathrm{BC} = \mathrm{BD} = \mathrm{AD}$$

ですから，AD$= 2$ がわかります。

これで準備が整いました。計算を始めましょう。

辺 AB の長さを x としましょう。また，E は辺 AB の中点になります (「二等辺三角形の頂点から下ろした垂線の足は底辺を二等分する」という定理がありました)。よって，

$$\mathrm{AE} = \mathrm{BE} = \frac{x}{2}$$

また，AD$= 2$ でしたから，CD$= x - 2$ です。

$\triangle$ ABC $\backsim \triangle$ BCD なので，

$$\mathrm{AB} : \mathrm{BC} = \mathrm{BC} : \mathrm{CD}$$

よって，

$$x : 2 = 2 : (x - 2)$$

「内項の積は外項の積に等しい」ので (これは以前に説明しています),

$$x(x - 2) = 4$$

ゆえに

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

これを解くが，$x > 0$ に注意すると，

$$x = 1 + \sqrt{5}$$

ゆえに，

$$\mathrm{AE} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

「三平方の定理」を用いて DE を計算すると，

$$\mathrm{DE} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}$$

残念ですが，この二重根号ははずれません。

以上のことから

$$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}, \quad \cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

を得ます。

次に 18° の三角比ですが，同じ状況で頂点 A から辺 BC に垂線を下ろし，その足を M としましょう (自分で図を描いてください)。二等辺三角形の性質から，この直線は頂角 A を二等分し，また，AM と BC は垂直です。つまり $\triangle$ ABM は $\angle$M$= 90^\circ$ の直角三角形であり，$\angle$BAM$= 18^\circ$ になっています。

よって，

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}. \quad \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

問 189 上の計算を実行してください。

補注　36° の三角比を求める途中で得られた AB の値を用いると，正五角形をコンパスと定規だけで作図することができます。

AB$= 1+\sqrt{5}$ でしたが $\sqrt{5}$ は，直角をはさむ二辺の長さが 1 と 2 であるような直角三角形の斜辺ですから，これはコンパスと定規で作図できます。その長さに 1 を加えれば AB の長さになり，これを用いて与えられた辺 BC から頂点 A の位置を作図できます。

辺 BC の長さを用いて点 A と点 B から頂点 D が，点 A と点 C を用いて頂点 E が作図できます。

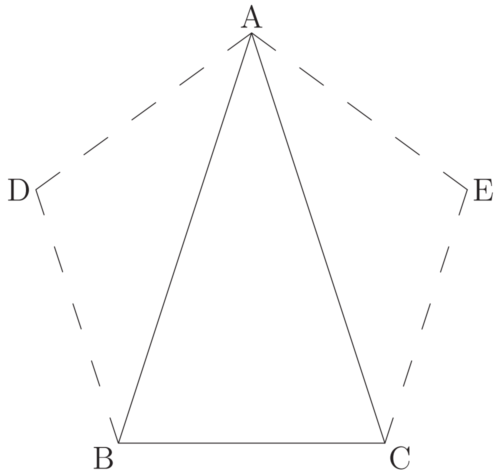


図 14.2: 正五角形

ちなみにこの正五角形は 1 辺の長さが 2 になっています。　**(補注終)**