補 講15　組み立て除法について

15.0　はじめに

割る式が 2 次以上のときには，本文で説明した方法でしか商と余りを計算することはできませんが，割る式が 1 次，それも $x-\alpha$ の場合には簡単に，商と余りを計算する方法があります[1]。

「組み立て除法」と呼ばれる計算方法です。ここでは,「組み立て除法」について説明します。

15.1　組み立て除法

例題 116 $(x^3+x^2-4x-3)\div(x-2)$ の商と余りを組み立て除法によって計算せよ。

解説　次のような表を準備します。

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 1 & -4 & -3 \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array}$$

左の折れ線で区切ったところにある数 2 は $x-2$ の 2，その右に並んでいる四つの数は x^3+x^2-4x-3 の係数です。

以下，説明を次ページにある図と対照させながら読んでください。

(1) まず四つ並んでいる一番左端の数 1 をそのまま線の下までおろします。

(2) 次に今おろした 1 と折れ線で区切ったところにある数 2 をかけ，1 の下に書きます。

(3) 上下で足し算をし (つまり $1+2$ を計算します)，線の下に結果を書きます。

---

[1]「剰余の定理」によって余りは簡単に計算できますが，商はだめだったことを思い出してください。

また,「因数定理」を用いて 3 次式や，4 次式を因数分解するときに，どうしても $x-\alpha$ の形の式で割り算し，商も計算しなければならなかったことも思い出してください。

(1)

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 1 & -4 & -3 \\ & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 1 & -4 & -3 \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 1 & -4 & -3 \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & 3 & & \end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 1 & -4 & -3 \\ & & 2 & 6 & \\ \hline & 1 & 3 & & \end{array}$$

(5)

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 1 & -4 & -3 \\ & & 2 & 6 & \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \end{array}$$

(6)

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 1 & -4 & -3 \\ & & 2 & 6 & 4 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

(4) 今計算して得た数 3 と左端の 2 をかけて得られる数を -4 の下に書きます。
(5) 上下で足し算し，線の下に結果を書きます。
(6) もう一度同じことを繰り返すと，一番下の図を得ます。

これで計算は終わり。線の下の一番右にある数が余り，その左に並んでいる数が，商の係数で，右から定数項，x の係数，x^2 の係数となっています。

よって $(x^3+x^2-4x-3)\div(x-2)$ の商は x^2+3x+2，余りは 1 です。

解答例　下の計算より，

$$\text{商は } x^2+3x+2,\ \text{余りは } 1 \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 1 & 1 & -4 & -3 \\
\hline
 & & 2 & 6 & 4 \\
\hline
 & 1 & 3 & 2 & 1
\end{array}$$

計算の方法がつかめたでしょうか?
次の問いで練習してください。

練習 308 次の割り算を，組み立て除法で計算せよ。
(1) $(x^3+x^2-5x-1)\div(x-1)$
(2) $(x^3-x^2+1)\div(x+2)$
(3) $(x^4-1)\div(x-1)$

なぜこのような計算で商と余りが計算できるのか，簡単に説明しておきます。

以下割られる式を 3 次式として説明しますが，これが何次式であっても成立することは明らかでしょう。

さて，$(ax^3+bx^2+cx+d)\div(x-k)$ の商を lx^2+mx+n，余りを R とします。すると

$$ax^3+bx^2+cx+d=(x-k)(lx^2+mx+n)+R$$

右辺を展開して整理すると，

$$ax^3+bx^2+cx+d=lx^3+(-kl+m)x^2+(-km+n)x+(-kn+R)$$

両辺の係数を比較して，

$$a=l,\ b=-kl+m,\ c=-km+n,\ d=-kn+R$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
k & a & b & c & d \\
\cline{1-1}
 & & kl & km & kn \\
\hline
 & l & m & n & R
\end{array}
$$

よって

$$l = a,\ m = b + kl,\ n = c + km,\ R = d + kn\ \cdots (*)$$

ここ現れた各文字を先に説明したような図で表すと，上のようになります。

$(*)$ とこの図を見比べれば，組み立て除法の計算がまさに商と余りを与えることが理解できるでしょう。