「講義と演習」シリーズ　入試問題編 1

整数の性質

小浪吉史

平成 14 年 1 月 1 日

「講義と演習」シリーズについて

巷(ちまた)には数多くの参考書があふれています。しかしそれらはページ数の制約から，また入試問題の解説という目的から，教科書レベルの内容は理解しているものという前提で作られていることが多いようです。

一方最近の教科書は，授業において教師による説明が補われることを期待し，読んだだけで理解できるようにできていないものが多く，少し数学の苦手なものが教科書だけを手がかりに勉強していくことは大変な困難を伴うように見えます。

これは数学は苦手なものの，自ら勉強しなんとかしようという意欲を持つ生徒にとって，大変つらい状況でしょう。

このシリーズは，そういった意欲を持った人に自習教材を提供することを目的に書かれたものです。そしてこの目的を達成するために，授業に相当する講義編と，参考書などで解説されているような演習編で構成しています。

「講義編」の本文ではできるだけストーリー性をもたせ，さまざまな考え方を順に積み重ねていき，それによって数学というものが一つの構築物であることが見えてくるように解説しています。

また本文に入れると話の筋が見えなくなる恐れがあるものの，できることならみなさんに知っておいてもらいたいと思ったテーマを付録で簡単に解説しました。この部分は，これから数学の教員になろう，あるいは現に教えていらっしゃる方々にも場合によったら参考になるかとも思い，かなり踏み込んだものまで取り上げてみました (もともと，本シリーズは私の講義ノートのようなものですから，自分の心覚えという意味もあります)。

演習編は二つの部分に分け,「基礎演習編」では，講義編で扱った例題なども含め，それだけでも順に読み，類題を解いていけば理解できるように編集してみました。

また「入試問題編」では，前半で入試問題を解くときに現れるテクニックを解説し，後半では，内容的に複雑で難しいもの，特に入試問題から取材した問題を提示，解答例を付しました。これは，読者として最終的に理工系の大学，あるいは国公立の文科系の大学への進学を考えている人，あるいは将来数学を道具として使うことが予想される人たちを想定したからです。

しかしながら一言ご注意申し上げます。それは,「入試問題編」は入試問題を題材にしていますが，これは入試の傾向を調べたものではないということです。つ

まりどの問題を選択し，取り上げているかの選択基準には，私の好みがかなり反映しているということです。この点を，あらかじめ御了承ください。

初めて読むときには難しさを感じるかもしれません。しかし2度3度と読むにつれて，それぞれの言葉の意味が頭に定着し，理解が深まっていくことでしょう。あきらめずに何度も読み，何度もチャレンジしてください。

また高校で数学を離れる予定の人は，講義編をしっかり学習するだけでもかなりの効果があると思います。

生身の教師による講義のときは，わからないことが生じたならすぐに質問し，質問者の知識と理解度，性格などにあった答えが得られるのに対して，このような印刷物による講義ではそれは不可能です。逆に通常の講義は一度聞いたらそれっきり，同じことを繰り返し聞くことはたいていの場合不可能であるのに対して，こういった印刷物なら納得がいくまで繰り返し繰り返し読むことができます。この二つのよい点だけが実現できると最高です。そのためには，適当な指導者を見つけ，その人のもとで添削を受けながら勉強すると，より効果的でしょう。

このような特徴をよく理解した上で，本シリーズに取り組んでもらえれば，読者の理解は深まり，センスは一段と向上するであろうと思います。皆さんの健闘を期待し，実力アップを願っています。

小浪　吉史

2002年1月1日

目 次

第1章　基礎テクニック

1.1　はじめに

本分冊は，入試問題編です。

本章では，一通り高校での数学の学習を終えている，つまり高校3年間で学習する知識を仮定し，入試問題でよく現れる問題を取り上げ，解き方のテクニックを紹介します。それゆえ，問題を解くためにはなんでもあり。使えるものは何でも使うという方針で解説しています。特に合同式については，積極的に使ってみています。

とはいうものの，例題の選択，そして解答例にはかなり私の好みが反映しています。それゆえ，申し訳けありませんが入試の出題傾向に即しているとは限らないことをお断りしておきます。

また節見出しに,「整数値関数」とか「ピタゴラス型」というものがありますが,これは私が問題の内容に即してつけてみたものです。本書以外では通用しないかもしれませんので，ご注意ください。

注意：以下「整数」とは負の整数もあわせたものをいう。

1.2　方程式の整数解

例題 1　$xy = x + y + 5$ を満たす整数 $x,\ y$ を求めよ。ただし，$x > y$ とする。(98 成城大)

解説　整数に関する問題を解く方法には，さまざまな方法があり，また場合分けなどが多くなります。その意味では少し面倒なのですが，慣れてくれば，やさしく感じることもあるでしょう。

さて，本例題は整数の性質の一つ,「どんな整数も二つの整数の積に表すことができる」を用います。

これは素数でない整数 (これを **合成数** といいます) の場合は，明らかです。与えられた数が素数であっても，一方を 1 と考えれば，成り立っています。

与えられた等式は，このままでは上の性質を適用できません。そこで，なんとか積の形になるように変形をしていきます。

積の形に変形するということは，因数分解するということですが，与えられた等式から，どうやって積の形にもっていったらよいのか，すぐにはわからないかもしれません。

そこでまず共通因数をもつ部分のみをさがしてみましょう。すると左辺に xy, 右辺に x があります。ということは x を左辺に移項すれば，この二つの項で因数分解ができることに気がつくでしょう。

ついでだから y も移項し (しかし定数項は右辺に残しておくのがコツです)，上の因数分解をすると，

$$x(y-1) - y = 5$$

ここで，今移項した y を使って左辺が因数分解できれば，ラッキーです。その手がかりは $x(y-1)$ にあって，$-y$ とある数があれば，共通因数 $y-1$ を作ることができます。そのある数とは?

そう，1 です。

そこで両辺に 1 を加えておいて，$-y$ と 1 を -1 でくくると，

$$x(y-1) - (y-1) = 6$$

ここまでくれば左辺が

$$(x-1)(y-1) = 6$$

というように因数分解できます。

これで第一段階が終わりました。

さて，これからが本例題の本番です。

左辺が積の形に変形できました。ということは $x-1$ と $y-1$ はかけて 6 となる整数です。それにはどんなものがあるでしょう。

九九からすぐに 2×3 が思い浮かぶことでしょう。これから $x-1=2,\ y-1=3$ という式が得られます。

しかしかけて 6 となるのはこれだけではありません。$x-1=3,\ y-1=2$ であってもかまいません。

さらに両方とも正の数である必要もありません。

似たようなことを因数分解のときにやっていますが，同様の検討をすることで，解答例にあるような 8 通りの場合が考えられることがわかるでしょう。

以下それぞれを解きます。本例題には，$x>y$ という条件も付け加えられているので，解の吟味も忘れないように。

解答例　移項して整理すると，

$$(x-1)(y-1)=6$$

$x,\ y$ は整数なので $x-1,\ y-1$ も整数。よって

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x-1=6 \\ y-1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-1=-1 \\ y-1=-6 \end{cases} \quad \begin{cases} x-1=-6 \\ y-1=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=2 \\ y-1=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x-1=3 \\ y-1=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x-1=-2 \\ y-1=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x-1=-3 \\ y-1=-2 \end{cases}$$

の 8 通りが考えられる。それぞれを解いて，$x>y$ に注意すると，

$$(x,\ y)=(7,\ 2),\ (0,\ -5),\ (4,\ 3),\ (-1,\ -2)\cdots\textbf{(答)}$$

類題 1 $x+2y=-xy$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

例題 2　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$ を満たす自然数 $x,\ y$ の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(97 東京工業大)

解説　分数式なのでちょっとためらいが生まれるかもしれませんが，びびらないでください。分数の形の方程式を解くときと同様にして分母を払えばいいのです。つまりこの例題の場合は両辺に $2xy$ をかければいいわけです。

実行すると

$$2y+2x=xy$$

この形はすでに前問でやっているので，解説の必要はないでしょう。復習を兼ねて，解答例を見る前に解いてみてください。

さて，この問題には別解があります。その解き方もよく使われるので，紹介しておきましょう。

本例題には $x,\ y$ は自然数という以外に制限がありませんが，解きやすくするために $x \leqq y$ という条件をつけておきます。今 x も y も自然数なので，この不等式の両辺を xy で割ると

$$\frac{1}{y} \leqq \frac{1}{x}$$

となります。そこでもともと与えられている等式の右辺 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の $\dfrac{1}{y}$ を $\dfrac{1}{x}$ で置き換えれば，置き換えた後の方が大きくなります。つまり

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leqq \frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x}$$

よって

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{2}{x}$$

という不等式が得られます。

これの分母を払うと

$$x \leqq 4$$

で，x が自然数であったことを考慮すると，結局，x の値としては，

$$x=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

の四つしかあり得ません。

そこで，この可能性を しらみつぶし に調べていきます。

まず $x = 1$ のときを考えると，元の等式は

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

となり，整理すると，

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}$$

y は自然数でしたから，当然正。よって左辺は正ですが，右辺は負であり，こんなことはあり得ません。ゆえに，$x = 1$ ということは起こり得ません。

次に $x = 2$ とすると，同様にして

$$\frac{1}{y} = 0$$

となり，この等式を満たす y はありません。よってこれもダメ。

後二つも同様で，x の値を代入してみて調べていくと，これらからは y の値が得られます。

この問題の $x,\ y$ には何の制限もなく，上で $x \leqq y$ としたのは，問題を解くために自分でつけたものです。つまりこの問題では当然 $y < x$ ということもあり得ますが，それは上の検討で x と y の役割を入れ替えるだけで済みます。それへの言及が解答例の最後の部分です。

本例題の場合は，前者の解き方の方が簡単ですが，いつでも使えるわけではありません (その例を二番目の類題に示します)。むしろ後者の方が，一般的に使える方法でもあります。

解答例　分母を払って

$$2y + 2x = xy$$

移項して変形すると

$$(x-2)(y-2) = 4$$

これより

$$\begin{cases} x-2=1 \\ y-2=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=4 \\ y-2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=2 \\ y-2=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2=-1 \\ y-2=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=-4 \\ y-2=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=-2 \\ y-2=-2 \end{cases}$$

これらを解いて，$x,\ y$ が自然数であることに注意すると，

$$(x,\ y) = (3,\ 6),\ (4,\ 4),\ (6,\ 3) \cdots \textbf{(答)}$$

別解　$x \leqq y$ とすると $\dfrac{1}{y} \leqq \dfrac{1}{x}$。これを与えられた等式に代入すると

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{2}{x}$$

分母を払って

$$x \leqq 4$$

x は自然数なので $x = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ のいずれか。
(1) $x = 1$ のとき，元の等式より

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}$$

を得るが，これを満たす自然数 y は存在しない。
(2) $x = 2$ のとき，元の等式より，

$$\frac{1}{y} = 0$$

これを満たす自然数 y は存在しない。
(3) $x = 3$ のとき，

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} &= \frac{1}{6} \\ \therefore\ y &= 6 \end{aligned}$$

(4) $x = 4$ のとき

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

これから

$$y = 4$$

よって

$$(x,\ y) = (3,\ 6),\ (4,\ 4)$$

　また $y < x$ のときは，同様にして

$$(x,\ y) = (6,\ 3)$$

を得る。
　よって

$$(x,\ y) = (3,\ 6),\ (4,\ 4),\ (6,\ 3) \cdots \textbf{(答)}$$

類題 2 $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$ を満たす正の整数 $x,\ y$ の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

類題 3 $x,\ y,\ z$ は自然数で，$x < y < z$ とするとき，$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$ を満たす $x,\ y,\ z$ を求めよ。 (01 神戸薬科大)

例題 3　整数 $a,\ b,\ c,\ d$ を係数とする 3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ が有理数の解 $\dfrac{q}{p}$ ($p,\ q$ は互いに素な整数) をもつとき，a は p で割り切れることを示せ。　(98 岡山県立大)

解説　いきなりこんな問題が出されたら，慣れていないと何をしたらいいのか，さっぱりわかりませんね。特に「$p,\ q$ は互いに素な整数」という条件はどのように使ったらいいのでしょうね。

ま，$\dfrac{q}{p}$ が解であるというのですから，ひとまず与えられた方程式に代入してみましょう。すると

$$\frac{aq^3}{p^3}+\frac{bq^2}{p^2}+\frac{cq}{p}+d=0$$

このままでは，もう一つの条件「$p,\ q$ は互いに素な整数」が使えません。両辺に p^3 をかけて分母を払いましょう。すると，

$$aq^3+bpq^2+cp^2q+dp^3=0$$

となります。

まだ「$p,\ q$ は互いに素な整数」という条件が使える形ではありませんね。

ところで，この等式をよく見てみましょう。すると，左辺には四つの項がありますが，そのうちの右三つには p が含まれていることに気がつきます。

そこでこれらを p でくくり，ついでに右辺に移項しましょう。すると

$$aq^3=-p(bq^2+cpq+dp^2)$$

となります。

この等式は aq^3 は p で割り切れる，ということを意味しています (たとえば k が l で「割り切れる」ということを式で表してみてください)。

よって aq^3 を素因数分解したとき，そこには p の素因数が (個数まで含めて) すべて含まれていなければなりません。

ところで p と q は互いに素，です。これは p と q の最大公約数は 1 である，というのがもともとの定義です。言い替えると，p のどの素因数も q の素因数になっておらず，逆もいえます。

ということは，当然 q^3 の素因数分解には p の素因数は一つも含まれていません。

しかし aq^3 は p で割り切れる，つまり aq^3 の素因数分解には p の素因数がすべて含まれているのですから，a の素因数分解に，p の素因数がすべて含まれていなければばなりません。

これは a が p で割り切れる，ということを意味しています。

かなり難しく感じられたでしょうか?

確かに，理論的な問題なので，慣れないと難しく感じられると思います。でも，こういったところに単に計算だけで答えを出すだけではない，数学の面白さもあるのではないでしょうか。

この問題は，次数を一般化することができます。つまり

「整数係数の n 次方程式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0 \quad (a_0,\ \cdots a_n\text{は整数})$$

が有理数の解 $\dfrac{q}{p}$ ($p,\ q$ は互いに素な整数) をもつとき，a_n は p で割り切れる」

とできます。

解答例　$x = \dfrac{q}{p}$ を代入すると，

$$\frac{aq^3}{p^3} + \frac{bq^2}{p^2} + \frac{cq}{p} + d = 0$$

両辺に p^3 をかけて変形すると，

$$aq^3 = -p(bq^2 + cpq + dp^2)$$

よって aq^3 は p で割り切れる。今 p と q は互いに素なので，a が p で割り切れなければならない。

類題 4 $p,\ q$ を整数とし，$f(x) = x^2 + px + q$ とおく。このとき有理数 a が方程式 $f(x) = 0$ の一つの解ならば，a は整数であることを示せ。　　(00 愛媛大 (部分))

1.3　約　数

例題 4　$\dfrac{n+32}{n+2}$ が整数となる正の整数 n をすべて求めよ。　(97 法政大)

解説　分数式が完全に簡約されるのは，分母が分子の約数になっているときに限ります。しかし，このままではこの事実を使うことができないので，(分子) ÷ (分母) を計算すると，分子の次数は $n+2$ の次数である 1 より小。つまり定数となり，少し簡単な形になります。

割算を実行すると，

$$(n+32) \div (n+2) = 1 \text{ 余り } 30$$

よって

$$\frac{n+32}{n+2} = 1 + \frac{30}{n+2}$$

ここで上の事実を用いると，$n+2$ は 30 の約数になっていることが結論できます。
後は解答例から理解できると思います。解の吟味を忘れないように!

解答例

$$\frac{n+32}{n+2} = 1 + \frac{30}{n+2}$$

$\dfrac{n+32}{n+2}$ が整数になるので，$n+2$ は 30 の約数になっている。
30 の約数は 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 で，これが $n+2$ に等しい。
これらを解いて，$n > 0$ なるものを選べば，

$$n = 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 13,\ 28 \cdots \textbf{(答)}$$

類題 5 $8n^3 + 40n$ が $2n+1$ で割り切れるような正の整数 n をすべて求めよ。
(99 千葉大)

類題 6 n が 1 より大きい整数のとき，$\dfrac{-5n+149}{n-1}$ が整数となるものはいくつあるか。　(94 名城大・農 (改))
ヒント：求めるべきは n ではなくて，その個数である。もちろん，例題と同じようにすべてを求めて数を数えてもよいが，少し簡単な方法がある。

1.4　倍　数

例題 5　n を整数とする。n^2 が 3 の倍数ならば，n は 3 の倍数であることを証明せよ。

解説　もしこの問題が「n が 3 の倍数ならば，n^2 は 3 の倍数である」なら，簡単ですね。しかし実際には仮定と結論が反対になっています。つまり本例題は，この逆を証明せよ，という問題です。

通常ある命題とその逆命題の真偽は一致しません。つまりある命題が真，つまり正しいとしても，逆も正しいとは限りません。よって逆が正しいと主張をするなら証明を与えなければいけません。

これらのことについてくわしいことは，本シリーズの講義編で解説します。ご存知ない方はそちらもご覧ください。

というわけで，きちんと証明をすることになるのですが，どうすればいいでしょう。

実は，この命題を直接証明するのは困難です。そこで，対偶を証明することにします。

「p ならば q である」という命題に対して,「q でないならば p でない」という命題を，元の命題の **対偶** といいます。そして重要なことは，元の命題と，その対偶の真偽は一致します。つまり，元の命題が正しいことを証明するには，その対偶を証明してもいいのです。

これらについても講義編で解説します。

さて，本例題の対偶はどうなるでしょう。仮定が「n^2 は 3 の倍数」，結論が「n は 3 の倍数」ですから，

$$n \text{ が } 3 \text{ の倍数でないならば，} n^2 \text{ は } 3 \text{ の倍数でない}$$

となります。

これなら，先の「n が 3 の倍数ならば，n^2 は 3 の倍数である」と同じくらい簡単になります。

実際 n が 3 の倍数でないということは，3 で割ったときの余りは 1 か 2 です。つまり n はある整数 k を用いて，$n = 3k + 1$ あるいは $n = 3k + 2$ と表すことができます。

あとはこれらの 2 乗を計算してみて，3 の倍数にならないこと，つまり，3 で割ったときの余りが 1 か 2 になることを示せば証明が完了します。

実質的には以上で完全な証明になるのですが，$(3k + 1)^2$ と $(3k + 2)^2$ の計算をそれぞれやらなければならないので，ちょっと面倒ですね (計算に慣れた人ならそんなに いとわしく は感じないでしょうけど)。

そこで少しだけ表現が単純になる書き方を紹介しておきましょう。

ちょっと話が横道にはいりますが，たとえば二つの展開公式

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2
\end{aligned}
$$

で説明しましょう。

この二つの公式はよく似ています。で，異なるところは，上の公式で左辺の $+$ が $-$ になると，右辺の $2ab$ の $+$ が $-$ になることです。このようなときに，二つの式を書くのは面倒です。そこでこれを

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (\text{複号同順（ふくごうどうじゅん）})$$

と書くのです。

この書き方では最後に書いた「複号同順」ということばがポイントです。

$\pm$ という記号を「複号」といいました。で，同順とは，その複号を「同じ順」に読んでください，という意味です。「同じ順」とは，もし，左辺で複号の上のほうにある $+$ の方を読んだとしたら，右辺も (実は複数複号がでてくることもありますから，そのときはどれも) 複号の上のほうを読む，もし左辺で複号の下のほうにある $-$ のほうを読んだとしたら，右辺も複号の下のほうを読む，という意味です。

これを使うと，立方の和，立方の差に関する因数分解の公式は，次のように一つに書けます。

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \quad (\text{複号同順})$$

複号を読むところに注意しながら，上の表現が正しいことを確認してください。

さて，本例題の解答例の書き方にいきましょう。

先の解説から，$n = 3k+1,\ 3k+2$ の場合についてそれぞれ計算すれば，ひとまずは OK です。が，$3k+2$ は

$$3k+2 = 3k+3-1 = 3(k+1)-1$$

と変形することが可能です。ということは，$k+1$ を改めて k とおけば，3 で割ると 2 余る整数は，整数 k を用いて $3k-1$ と表すことができるというわけです。

まとめると，3 の倍数でない整数は，k を整数として $3k+1,\ 3k-1$ と表すことができるのです。

すると，先の和の平方，差の平方の展開公式と同様，違いは $+1$ か -1 ですから，

$$n^2 = (3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1 \quad (\text{複号同順})$$

と表すことができ，答案が少し短くなります。

合同式を用いた証明法　本例題の解説も大分長くなってしまいましたが，もう一つの解き方を紹介しておきましょう。それは「合同式」を用いる方法です。

合同式については，簡単な説明を講義編 1 の付録に与えておきました。以下の解説はこの付録の知識を仮定します。

さて，今は 3 の倍数かどうかを問題にしていますので，法は 3 で考えます。対偶を証明することには変わりないので，n が 3 の倍数でないとしましょう。すると

$$n \equiv 1 \pmod 3 \text{ または } n \equiv 2 \pmod 3$$

です。

$n \equiv 1 \pmod 3$ の場合，

$$n^2 \equiv 1^2 = 1 \pmod 3$$

であり，$n \equiv 2 \pmod 3$ の場合，

$$n^2 \equiv 2^2 = 4 \equiv 1 \pmod 3$$

つまりいずれの場合も

$$n^2 \equiv 1 \pmod 3$$

であり，3 の倍数になっていないことが示せました。

実は $2 \equiv -1 \pmod 3$ ですから，

$$n^2 \equiv (-1)^2 = 1 \pmod 3$$

とやっても構いません。これは先の解説で $3k+2$ の代わりに $3k-1$ を用いたことに対応します。

解答例では，複号を用いてみました。書き方の参考にしてみてください。

解答例　対偶「n が 3 の倍数でないならば，n^2 は 3 の倍数ではない」を証明する。

n は 3 の倍数でないので，整数 k を用いて $n = 3k \pm 1$ と表すことができる。

$$\begin{aligned} n^2 &= (3k \pm 1)^2 \\ &= 3(3k^2 \pm 2k) + 1 \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

よって，n^2 を 3 で割った余りは 1。つまり n^2 は 3 の倍数ではない。■

別解　対偶「n が 3 の倍数でないならば，n^2 は 3 の倍数ではない」を証明する。

n は 3 の倍数でないので，複号同順で示すと，

$$n \equiv \pm 1 \pmod 3$$

よって，

$$n^2 \equiv (\pm 1)^2 = 1 \pmod 3$$

これは n^2 が 3 の倍数でないことを示している。■

類題 7 n を整数とするとき，n^2 が 5 の倍数ならば n は 5 の倍数であることを証明せよ。 (98 福岡教育大)

ヒント：対偶を証明します。その際，n は 5 の倍数でないと仮定するわけですが，5 の倍数でないということは，5 で割ったときの余りが 1，2，3，4 のいずれかです。そのまま，それぞれの場合を計算していっても構わないのですが，複号を用いることで少しだけ答案が短くなります。考えてみてください。

もちろん，合同式を用いた解答も可能です。

1.5　合同式

> **例題 6**　2000^{2000} を 12 で割ったときの余りを求めよ。　(00 早稲田大)

解説　とてもじゃありませんが，試験の短い時間の中で 2000^{2000} を計算することはできませんね (たとえ試験でなくても無理ですって!)。

しかし，問題は 12 で割ったときの「余り」を問うていますので，実際には 2000^{2000} を計算する必要はありません。そして余りを聞いているのですから，合同式を用いて計算した方が簡単です。

$2000 \div 12$ を計算すると，商が 166 で，余りが 8 です。よって

$$2000 \equiv 8 \pmod{12}$$

です。ということは，2000^{2000} を 12 で割ったときの余りは，8^{2000} の余りに等しくなります。

少し問題が簡単になりましたが，それでも 8^{2000} の余りを計算するのはまだ大変です。そこでいきなり 8^{2000} を計算せずに (これもやろうと思ってもできませんね)，8^2, 8^3, 8^4 を計算してみましょう。すると，

$$\begin{aligned} 8^2 &= 64 \equiv 4 \pmod{12} \\ 8^3 &= 8^2 \times 8 \equiv 4 \times 8 = 32 \equiv 8 \pmod{12} \\ 8^4 &= 8^3 \times 8 \equiv 8 \times 8 = 64 \equiv 4 \pmod{12} \end{aligned}$$

これらの計算から，n が偶数のとき

$$8^n \equiv 4 \pmod{12}$$

n が奇数のとき

$$8^n \equiv 8 \pmod{12}$$

であることが予想でき，実際に正しいことが，数学的帰納法によって証明できます。

2000 は偶数ですから，前者の場合であり，結局 2000^{2000} を 12 で割ったときの余りは 8 であることが結論できます。

解答例

$$2000 \equiv 8 \pmod{12}$$

また，

$$\begin{aligned} 8^2 &= 64 \equiv 4 \pmod{12} \\ 8^3 &= 8^2 \times 8 \equiv 4 \times 8 = 32 \equiv 8 \pmod{12} \\ 8^4 &= 8^3 \times 8 \equiv 8 \times 8 = 64 \equiv 4 \pmod{12} \end{aligned}$$

　これらの計算から，n が偶数のとき

$$8^n \equiv 4 \pmod{12}$$

n が奇数のとき

$$8^n \equiv 8 \pmod{12}$$

である。
　よって

$$2000^{2000} \text{ を } 12 \text{ で割ったときの余りは } 8 \cdots \textbf{(答)}$$

類題 8 今日は金曜日です。以下の問いに答えなさい。

(1) 10^6 日後は何曜日ですか。

(2) 10^{100} 日後は何曜日ですか。

(3) 3^{100} 日後は何曜日ですか。 (00 熊本県立大)

ヒント：曜日に関する問題ですから，法は 7 で考えます。

例題 7　n を正の整数とし，2000^n を 7 で割ったときの余りを a_n とおく。次の各問いに答えよ。

(1) a_1，a_2，a_3 を求めよ。

(2) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とおく。S_n が 7 で割り切れる最小の n を求めよ。

(00 同志社大)

解説　問題の流れにしたがって計算をしてけば答えが得られますので，そんなに難しくはないでしょう。

実際，a_1 は 2000 を 7 で割ったときの余りであり，割算を実行すれば，商 285 と余り 5 を得ます。つまり $a_1 = 5$ です。

次に a_2 は 2000^2 の余りなのですが，まさか 2000^2 を計算し，4000000 を 7 で割るようなことはしないでしょうね。ま，やってもそんなに大変ではありませんが，以下のようにやる方が簡単です。それは，$k = 285$ とおけば，上の計算結果から，

$$2000 = 7k + 5$$

よって

$$2000^2 = (7k+5)^2 = 7(7k^2 + 2k) + 25$$

となり，$7(7k^2 + 2k)$ は 7 の倍数ですから，2000^2 を 7 で割った余りは，25 を 7 で割った余りに等しいことがわかります。つまり $a_2 = 4$。

さらに，a_3 を計算するには，a_2 の計算から 2000^2 は整数 k' を用いて

$$2000^2 = 7k' + 4$$

であることがわかっていますので，$2000^3 = 2000 \times 2000^2$ であることを用いれば，

$$2000^3 = 2000 \times 2000^2 = (7k+5)(7k'+4) = 7(7kk' + 4k + 5k') + 20$$

となり，先と同じ議論により，2000^3 を 7 で割った余りは 20 を 7 で割った余りに等しいことが結論できます。

以下同様にして $2000^n = 2000 \times 2000^{n-1}$ と直前に得た結果から，a_4，a_5，$\cdots$ と計算ができます。

(2) はそんなに大きな n が答えになるとは思えませんので，ひとまずいくつかの S_n を計算してみます。すると，幸いなことに，S_6 が 21 となり，それ以前の S_n は 7 で割り切れません。

というわけで，(2) の答えを得ます。

上で解説したことをそのまま式にして書いていけば，答案になりますが，解答例では合同式を用いました。こちらのほうが，記述も計算も簡単になるからです。

これでひとまず本例題は片付きましたが，類題のこともありますので，もう少し余計なことをお話しておきましょう。

上では，a_1 から順に余りを計算していきましたが，実は一気に一般の式を得る方法があります。それを説明するために，もう一度上の計算を振り返ってみましょう。

まず注意してほしいことは，結局 2000^3 を 7 で割ったときの余りは，2000 を 7 で割ったときの余りと 2000^2 を 7 で割ったときの余りをかけたものを 7 で割ったときの余りに等しかった，ということです (うーむ，大分複雑ないいかたですね。式で書くと簡単なのですが。それは結論のところでしましょう)。

そしてもう一段前に戻れば，2000^2 の余りは 2000 を 7 で割ったときの余りを 2 乗したものに等しいのですから，結局 2000^3 を 7 で割ったときの余りは 2000 を 7 で割ったときの余りの 3 乗を 7 で割ったときの余りに等しいことがわかります。つまり $2000 = 7k + 5$ でしたから，

$$2000^3 = (7k+5)^3 \equiv 5^3 \pmod 7$$

となるわけです。

これは一般の場合にも成り立ちます。つまり

$$2000^n \equiv 5^n \pmod 7 \quad \cdots (*)$$

が成立します。

2000^n を 7 で割った余りを計算するより 5^n を 7 で割った余りを計算するほうが少し簡単ですが，それでも実際に計算するとなると大変です。しかし一般論を展開するには，このほうが何かと便利でしょう。

$(*)$ は数学的帰納法，あるいは二項定理を用いれば証明できますので，練習を兼ねて，書き下してみてください。

解答例

(1) $2000 = 7 \times 285 + 5$ より，$a_1 = 5 \cdots$ **(答)**

また，

$$\begin{aligned} 2000^2 &\equiv 5^2 = 25 \equiv 4 \pmod 7 \\ 2000^3 &\equiv 5 \times 4 = 20 \equiv 6 \pmod 7 \end{aligned}$$

よって $a_2 = 4,\ a_3 = 6 \cdots$ **(答)**

(2) 同様にして，

$$\begin{aligned} 2000^4 &\equiv 5 \times 6 = 30 \equiv 2 \pmod 7 \\ 2000^5 &\equiv 5 \times 2 = 10 \equiv 3 \pmod 7 \\ 2000^6 &\equiv 5 \times 3 = 15 \equiv 1 \pmod 7 \end{aligned}$$

より

$$a_4 = 2,\ a_5 = 3,\ a_6 = 1$$

よって

$$\begin{aligned} S_1 &= 5 \\ S_2 &= 9 \\ S_3 &= 15 \\ S_4 &= 17 \\ S_5 &= 20 \\ S_6 &= 21 \end{aligned}$$

より，

$$n = 7 \cdots \textbf{(答)}$$

類題 9 a は 7 で割ったときの余りが 3 になる自然数とする。

(1) a^n を 7 で割った余りを a_n とするとき，a_6 を求めよ。

(2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を 7 で割った余りを b_n とするとき，b_{100} を求めよ。

(99 東京女子医科大)

1.6 整数値関数

例題 8 2次関数 $f(x) = ax^2 + bx$ がある。ある整数 k に対して，$f(k-1),\ f(k),\ f(k+1)$ が整数となるとき，次に答えよ。

(1) $2a,\ 2b,\ a+b$ は整数であることを示せ。

(2) すべての整数 n に対して $f(n)$ は整数であることを示せ。

(97 九州工業大)

解説 まずは $f(k-1),\ f(k),\ f(k+1)$ を計算してみましょう。すると

$$\begin{cases} f(k-1) &= ak^2 - 2ak + a + bk - b \\ f(k) &= ak^2 + bk \\ f(k+1) &= ak^2 + 2ak + a + bk + b \end{cases}$$

となります。ここで，$f(k-1)$ や $f(k+1)$ をよく観察すると，$ak^2 + bk$ という式を含んでいます。二番目の式から，これは $f(k)$ に等しいですから，書き換えると，

$$\begin{cases} f(k-1) &= f(k) - 2ak + a - b \\ f(k) &= ak^2 + bk \\ f(k+1) &= f(k) + 2ak + a + b \end{cases}$$

を得ます。

もう一度これらの式を観察すると，一番目の式と三番目の式では $2ak$ と b の符号が異なっています。ということは，これらを加えると $2ak$ と b が消えるということです。実際加えてみると，

$$f(k-1) + f(k+1) = 2f(k) + 2a$$

となり，$2a$ について解けば，

$$2a = f(k-1) + f(k+1) - 2f(k)$$

$f(k-1),\ f(k),\ f(k+1)$ は整数でしたから，右辺は整数。つまり $2a$ が整数であることが結論できます。

今度は三番目の式から一番目の式を引けば，符号の異なる二つの項 $2ak$ と b が生き残り，

$$f(k+1) - f(k-1) = 4ak + 2b$$

となります。これを $2b$ について解けば，

$$2b = f(k+1) - f(k-1) - 2a \times 2k$$

で，右辺の最後の項にうまく $2a$ が現れ，$f(k-1)$，$f(k+1)$ が整数であることとあわせれば，右辺が整数であることがわかります (k は整数でした!)。

さらに，三番目の式をもう一度よく見ると，

$$f(k+1) = f(k) + 2ak + a + b$$

となっており，ここに $a+b$ があります。そこで，この式を $a+b$ について解けば，

$$a + b = f(k+1) - f(k) - 2ak$$

よって，先と同じ理由によって，右辺は整数。

これで (1) は終わりです。

(2) はどうやったらいいでしょうね。当然 (1) で得た結論を使う形に持ち込む，という方針で臨(のぞ)むのでしょう。

$$f(n) = an^2 + bn$$

という式は整数 n に関するものですから，数学的帰納法を用いてはどうかというのは自然な発想でしょう。実際，$f(k+1) = f(k) + 2ak + a + b$ ですから，$n = k$ における仮定が $f(k+1)$ に関する結論を導くときに使える形になっています。また (1) の結果から $2a$，$a+b$ が整数でしたから，$2ak + a + b$ は整数です！

ということは，数学的帰納法が使える，ということです。

しかし，ここに一つ問題を感じる人がいるかもしれません。それは，数学的帰納法は,「自然数」に関する命題を証明するときに用いる証明法であって，この問題のように「整数」が対象になっているものには使えません。教科書に載っている問題だけしか経験していない人は，このように考えるのが普通かもしれません。

が，この問題ではうまい方法があります。

数学的帰納法というのは $n = k$ のときの仮定を利用して，$n = k + 1$ の場合を証明するというステップをとりました。つまり今いるところから一段上へ上がる，ということです。しかしいつでも一段上に上がることだけを考える必要はありません。一段下がることを考えてもいいわけです。つまり $n = k$ のときの仮定を利用して，$n = k - 1$ の場合を証明しても構わないわけです。

こういった考え方からもう一度先の三つの式を見直せば，

$$f(k-1) = f(k) - 2ak + a - b$$

がそのステップに使えることに気がつくと思います。

また，通常数学的帰納法の出発点は $n = 1$ ですが，これにこだわる必要もありません。問題によっては $n = 0$ からはじめてもいいのです。

本例題の場合は，すべての整数に関する命題ですから，$n = 0$ のときを証明し，$f(k+1)$ に関する式から自然数全体で成り立つことを示し，$f(k-1)$ に関する式から負の整数全体で成り立つことを示せばいいわけです。

数学的帰納法をこのように用いることもありますので，覚えておくといいでしょう。

ところで，本例題の解答例では，上のような解答を別解としておきました。というのは，実は，$f(n)$ をうまく変形すると，簡単に，結論が得られるからです。しかしこの変形はしらないとなかなかできないでしょう。

その意味ではあまりいい解答例とはいいたくないのですが，入試問題を解くテクニックとしては便利だと思いますので，こちらを本例題の解答例としようと思います。

その変形方法は，解答例を見ていただければお分かりのように，強引にほしい形を作っていくというものです。そのためにまず an を足したり引いたりします(こういった方法は，色々な場所で使われていますね)。さらに，2 をかけたり割ったりすることで，$2a$ をひねり出すのです。

解答例　(1)

$$\begin{cases} f(k-1) &= ak^2 - 2ak + a + bk - b \\ f(k) &= ak^2 + bk \\ f(k+1) &= ak^2 + 2ak + a + bk + b \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} f(k-1) &= f(k) - 2ak + a - b & \cdots(*) \\ f(k) &= ak^2 + bk & \cdots(**) \\ f(k+1) &= f(k) + 2ak + a + b & \cdots(***) \end{cases}$$

$(*) + (***)$ を作ると，

$$f(k-1) + f(k+1) = 2f(k) + 2a$$

ゆえに

$$2a = f(k-1) + f(k+1) - 2f(k)$$

仮定より，$f(k-1)$, $f(k)$, $f(k+1)$ は整数なので，右辺は整数。よって $2a$ も整数。

次に $(***) - (*)$ を作ると，

$$f(k+1) - f(k-1) = 4ak + 2b$$

ゆえに

$$2b = f(k+1) - f(k-1) - 2a \times 2k$$

$2a,\ k$ は整数なので，$2a \times 2k$ は整数で，これと仮定より，右辺は整数。よって $2b$ も整数。

さらに (3) より，

$$a + b = f(k+1) - f(k) - 2ak$$

で，右辺は整数。よって $a + b$ も整数。■

(2) n を整数とする。

$$\begin{aligned} f(n) &= an^2 + bn \\ &= an^2 - an + an + bn \\ &= an(n-1) + (a+b)n \\ &= 2a \times \frac{n(n-1)}{2} + (a+b)n \end{aligned}$$

ここで $n(n-1)$ は連続する二つの整数の積なので偶数。よって $\dfrac{n(n-1)}{2}$ は整数。また (1) の結果から $2a,\ a+b$ は整数。ゆえに $2a \times \dfrac{n(n-1)}{2} + (a+b)n$ は整数。よって $f(n)$ は整数。■

(2) の別証明　(I) $n = 0$ のとき，$f(0) = 0$。よって成り立つ。
(II) $n = k$ のとき，成り立つとする。つまり $f(k)$ が整数であるとすると，$(***)$ より

$$f(k+1) = f(k) + 2ak + a + b$$

であり，(1) の結果より $2ak,\ a+b$ は整数。ゆえに $f(k+1)$ も整数。ゆえに，任意の自然数 n について $f(n)$ は整数。

また，$(*)$ より，

$$f(k-1) = f(k) - 2ak + a - b$$

なので，同様にして $f(k-1)$ も整数。ゆえに，任意の負の整数 n について $f(n)$ は整数。

(I), (II)　より，任意の整数 n について $f(n)$ は整数である。■

類題 10 関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$　($a,\ b,\ c$ は実数) に対し，$f(1),\ f(2),\ f(3)$ がすべて整数である。

(1) $2a,\ a+b$ はともに整数であることを示せ。

(2) n が自然数ならば，$f(n)$ は整数であることを示せ。　　(00 東京学芸大)

類題 11 (1) 多項式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a,\ b,\ c$ は実数) を考える。$f(-1),\ f(0),\ f(1)$ がすべて整数ならば，すべての整数 n に対し，$f(n)$ は整数であることを示せ。

(2) $f(1996),\ f(1997),\ f(1998)$ がすべて整数の場合はどうか? (97 名古屋大)

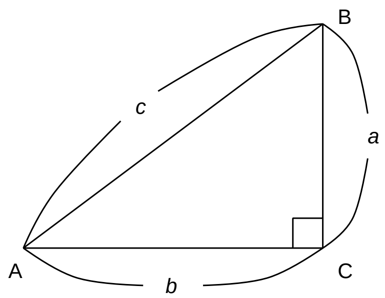
1.7　ピタゴラス型

例題 9　3 辺の長さがいずれも整数値であるような直角三角形を考える。このとき，直角をはさむ 2 辺の長さのうち，少なくとも一方は偶数であることを証明せよ。　(99 北海道大 (部分))

解説　中学校のとき学習した三平方の定理[1] は，非常に美しく，また強力な定理でもあります。それゆえ，数学の初等課程での到達点の一つとして，昔から教えられてきました。それは次のような定理でした。

定理 (三平方の定理)　図のような直角三角形 ABC において，

$$c^2 = a^2 + b^2$$



ここまでは，図形に関する性質なのですが，上の関係式 $c^2 = a^2 + b^2$ は面白い性質をもっています。その一つが，整数解をもつというもので，たとえば $a = 3,\ b = 4,\ c = 5$ は，この式を満たします (確かめてください)。また，たとえば $a = 5,\ b = 12,\ c = 13$ も解です。

で，一つ問題。

関係式 $c^2 = a^2 + b^2$ を満たす整数解は他にもあるでしょうか？

実は，本例題の後半がこの問題でした[2]。もちろん上に紹介した整数解 $a = 3,\ b = 4,\ c = 5$ をそれぞれ 2 倍した $a = 6,\ b = 8,\ c = 10$ も上の関係式の解なのですが，それでは面白くありません。

これはこれで面白い問題だと思いますので，まずは考えてみてください。

---

[1]たいていの教科書で「三平方の定理」として紹介しているので，仕方なくそれにしたがっていますが，私はこの定理を「ピタゴラスの定理」という名前で呼びたいですね。

数学では，発見した人に敬意を表して，その人の名前を定理につけるという習慣があります。私もそれにしたがいたいのです。

[2]正確には，この関係式を満たす数の組をもう一つ挙げよ，というものでした。

例題としてここに取り上げるにはちょっとそぐわないと思ったので，省略させてもらいました。

脱線ばかりしているようで，申し訳けないのですが，ついでに次の言葉も紹介しておきましょう。

定義 (ピタゴラス数)　方程式 $c^2 = a^2 + b^2$ の整数解を **ピタゴラス数** という。

つまり $a = 3,\ b = 4,\ c = 5$ や $a = 5,\ b = 12,\ c = 13$ はピタゴラス数です。
で，次の定理が成り立ちます。

定理 (ピタゴラス数)　ピタゴラス数は無数に存在する。

実はもっと厳密に，ピタゴラス数をすべて与えるような式が存在します。そして，それを導く途中で本例題の事実が用いられるのです。

さて，それでは本題にはいりましょう。
問題の要求は，先の定理中の $a,\ b$ の少なくとも一方が偶数であることを示すことです。しかし，こういったことはなかなか直接証明できないことが多いのが現状です。そこでよく使われるのが，対偶を証明したり，背理法を証明するという方針です。
本例題の場合は，背理法が適当です。つまり結論である「$a,\ b$ の少なくとも一方が偶数」という命題の否定，つまり「$a,\ b$ は両方とも奇数」だと仮定して議論をし，矛盾を導くのです。
で，今のところ先は見えませんが，ひとまずこのような仮定の下で，どんなことが導かれるのかを調べてみます。そのためにはピタゴラスの関係式 $c^2 = a^2 + b^2$ しか手がかりがありませんから，これを用います。
$a,\ b$ ともに奇数なので，$a = 2k + 1,\ b = 2l + 1$ と表すことができます。これらを上の式に代入して計算していくと，

$$c^2 = (2k + 1)^2 + (2l + 1)^2 = 4(k^2 + k + l^2 + l) + 2$$

です。この式は，c^2 が 4 で割ると 2 余る整数であることを示しています。これがどんなことに矛盾するというのでしょう？
ひとまず c^2 を 4 で割る，ということが見えてきましたので，c を 4 で割った余りで場合分けをしてみましょうか。
つまり $c = 4m,\ 4m + 1,\ 4m + 2,\ 4m + 3$ のそれぞれの場合について c^2 がどうなるのかを計算してみるのです (ここでは計算しませんので，みなさん自身で必ず計算してみてください)。すると，$c = 4m + 1,\ 4m + 3$ の場合は，いずれも c^2 は奇数になり，矛盾。残りの $c = 4m,\ 4m + 2$ の場合は，c^2 がいずれも 4 の倍数になります。よってこれも矛盾。
ま，これでもいいのですが，場合分けが多すぎてちょっと面倒です。もちろんこのようにするしかないこともありますが，今の場合は，もう少し単純な見方ができます。

c^2 は確かに 4 で割ると 2 余る整数なのですが，

$$c^2 = 2\{2(k^2 + k + l^2 + l) + 1\}$$

とも書けるわけですから，c^2 は偶数です。

つまり c を 4 で割った余り，言い替えれば奇数か偶数かで場合分けしたらどうなるかを計算してみればよいのではないか，という発想ができます。

$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明を聞いたことのある方は，ここで「ああ，これで解決したな」とピンとくるでしょう。実際,「$\sqrt{2}$ は無理数である」ことの証明には次の事実が用いられます。

c^2 が偶数であるための必要十分条件は， c が偶数であることである。

解答例では，この事実も証明しています (難しいことはありません。単に計算するだけです)。

解答例　直角三角形 ABC において $\angle \mathrm{C} = 90^\circ$ とする。このとき直角をはさむ二辺の長さを $a,\ b$ とし，斜辺の長さを c とすると，三平方の定理より，

$$c^2 = a^2 + b^2$$

今 $a,\ b$ ともに奇数であるとすると，$a = 2k + 1,\ b = 2l + 1$ とおくことができる。よって

$$c^2 = (2k + 1)^2 + (2l + 1)^2 = 4(k^2 + k + l^2 + l) + 2$$

よって c^2 は 4 で割ると 2 余る偶数である。

ゆえに c も偶数であるが，$c = 2m$ とすると，$c^2 = 4m^2$ となり 4 の倍数。

これは矛盾。

よって直角をはさむ 2 辺の長さのうち，少なくとも一方は偶数である。■

類題 12 (1) n を自然数とする。n^2 は 3 の倍数かまたは 3 で割った余りが 1 であることを証明せよ。

(2) 自然数 $a,\ b,\ c$ が $a^2 + b^2 = c^2$ を満たすとき，$a,\ b$ のうち少なくとも一つは 3 の倍数であることを証明せよ。

(00 滋賀大)

類題 13 $x,\ y,\ z$ を 0 でない整数とし，$x^3 + y^3 = z^3$ が成立しているならば，$x,\ y,\ z$ のうち少なくとも一つは 3 の倍数であることを示せ。　(98 信州大)

1.8　証明問題

例題 10　奇数の 2 乗は 8 で割ると 1 余ることを示せ。　(97 津田塾大)

解説　この問題で考える数は奇数なので，$2k+1$ と表すことができます。2 乗すると，$(2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$ となり，4 で割ると 1 余ることまではすぐに分かります。しかし問題で要求していることは「8 で割ったときの余り」です。

ここでよく最後の式を見ましょう。$k(k+1)$ という形があります。

これは言葉でいえば,「連続する二つの整数の積」になっています。

二つの連続する整数では，一方が必ず偶数でした。よってその積である $k(k+1)$ は偶数です。

これより $k(k+1) = 2l$ と表すことができるので，元々の式 $(2k+1)^2$ は結局

$$(2k+1)^2 = 4 \times 2l + 1 = 8l + 1$$

となり，$(2k+1)^2$ を 8 で割ったときの余りが 1 になることが結論できます。

補注　もう一つ記憶しておいてほしい事実に

連続する三つの整数の積は 6 の倍数である

というのがあります。証明を考えてみてください。

解答例　奇数は $2k+1$ と表すことができ,

$$\begin{aligned}(2k+1)^2 &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 4k(k+1) + 1\end{aligned}$$

「連続する二つの整数の積は偶数」なので $k(k+1)$ は偶数。よって $k(k+1) = 2l$ と書ける。

ゆえに,

$$(2k+1)^2 = 4 \cdot 2l + 1 = 8l + 1$$

ゆえに奇数の 2 乗は 8 で割ると 1 余る。

類題 14 (1) x が整数のとき，x^2 を 5 で割ったときの余りは 0，1，4 のいずれかであることを証明せよ。

(2) x が整数のとき，x^4 を 5 で割ったときの余りは 0 か 1 のいずれかであることを証明せよ。

(3) 方程式 $x^4 - 5y^2 = 2$ を満たすような整数の組 $(x,\ y)$ は存在しないことを証明せよ。　(97 岩手大)

第2章　実践問題

2.1　はじめに

入試対策編の後半は，過去数年の入試問題に取材しました。過去に似たような問題を見つけることができなかったものの，興味深い内容をもつものを紹介しています。ここにも私の好みが反映しています。

それぞれの問題に解答例を与えてみましたが，別解も可能なものもいくつかあります。研究してみてください。

2.2　問題集

1.　398398 のように 3 桁の自然数を 2 回繰り返してできる 6 桁の自然数は常に 91 で割り切れることを証明せよ。　(98 東京女子医科大)

2.　次の問いに答えよ。

(1) $n^3+1=p$ を満たす自然数 n と素数 p の組をすべて求めよ。

(2) $n^3+1=p^2$ を満たす自然数 n と素数 p の組をすべて求めよ。

(3) $n^3+1=p^3$ を満たす自然数 n と素数 p の組は存在しないことを証明せよ。

(00 島根大)

3.　a は整数とする。x の 3 次方程式 $x^3-ax-3a-18=0\cdots(*)$ は正の有理数 x_0 を解にもつとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) x_0 が自然数であることを次の方法で示せ。1 以外に公約数をもたない自然数 $p,\ q$ を用いて $x_0=\dfrac{p}{q}$ とおく。これを $(*)$ に代入して $q=1$ であることを示せ。

(2) 式 $(*)$ から a を x の式で表すと $a=\boxed{（ア）}+\dfrac{\boxed{（イ）}}{x+3}$ となる。ここで（ア）は x の整式,（イ） は整数である。（ア）,（イ） を求めよ。

(3) x_0 は 3 の倍数ではないとする。このとき a と x_0 の値が一組定まる。次の方法でこれを求めよ。(2) で求めた a の表示式の x に x_0 を代入したものを考える。そこで a が整数であることに注意して x_0 を求め，a を求めよ。

(97 電気通信大)

4.　方程式 $x^3-3x-1=0$ の解 α について次のことがらを示せ。

(1) α は整数ではない。

(2) α は有理数ではない。

(3) α は $p+q\sqrt{3}$ ($p,\ q$ は有理数) の形で表せない。　(97 小樽商科大)

5.　$a,\ b$ を奇数とするとき，2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ は整数解をもたないことを示せ。　(96 京都教育大)

6.　a と b を正の整数とする。任意の正の整数 n に対して $\dfrac{n^3+an-2}{n^2+bn+2}$ の値が整数となるように a と b の値を定めよ。　(00 高知大)

7.　次の問いに答えよ。

(1) 自然数 $a,\ b,\ c,\ d$ に $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{a}+d$ の関係があるとき，a と c が互いに素であれば，a と b も互いに素であることを証明せよ。

(2) 任意の自然数 n に対し，$28n+5$ と $21n+4$ は互いに素であることを証明せよ。

(00 大阪市立大)

8. 自然数 n に対し，$S_n=1^n+2^n+3^n+4^n$ とおく，このとき，

(1) S_n が 6 の倍数であるための条件を求めよ。

(2) S_n は 12 の倍数にならないことを示せ。 (00 奈良県立医科大)

9. 数列 $11,\ 1001,\ 100001,\ 10000001,\ \cdots$ について考える。

(1) この数列の一般項 (第 n 項) を n の式で表せ。

(2) この数列の項はすべて 11 の倍数である。このことを **数学的帰納法によって** 証明せよ。 (97 愛知教育大)

10. n を正整数とする。2^n+1 は 15 で割り切れないことを示せ。

(99 お茶の水女子大)

11. $f(x)=x^2+ax+b$ とする。

(1) すべての整数 n に対して $f(n)$ が整数であるとする。このとき，$a,\ b$ は整数であることを示せ。

(2) すべての整数 n に対して，$f(n)$ が偶数となるための $a,\ b$ の条件を求めよ。

(99 津田塾大)

12. 多項式 $f(x)=ax^2+bx+c$ について考える。$f(x)$ が整数値であるとは，x が整数のとき $f(x)$ が常に整数になることとする。

(1) $a=0$ とする。$f(x)=bx+c$ が整数値であるための必要十分条件は，$b,\ c$ が共に整数であることを証明せよ。

(2) 二つの条件

(i) $f(0)$ が整数である。

(ii) 多項式 $f(x+1)-f(x)$ が整数値である。

が成り立てば，$f(x)$ が整数値になることを示せ。必要なら数学的帰納法を利用せよ。逆に，$f(x)$ が整数値であるとき，(i), (ii) が成り立つことを示せ。

(3) $f(x)=ax^2+bx+c$ が整数値であるための a, b, c が満たすべき条件を求めよ。

(00 広島大)

13. n が 3 以上の整数のとき，$x^n+2y^n=4z^n$ を満たす整数 x, y, z は $x=y=z=0$ 以外に存在しないことを証明せよ。 (00 千葉大)

14. x と y は正の整数で，$2x^2=y^2+1$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) y は奇数であることを示せ。

(2) $y=2n+1$ としたとき，n が 4 の倍数であるか，または $n+1$ が 4 の倍数であるかであることを示せ。 (99 明治大)

15. a, b, c は $a^2-3b^2=c^2$ を満たす整数とするとき，次のことを証明せよ。

(1) a, b の少なくとも一方は偶数である。

(2) a, b が共に偶数なら，少なくとも一方は 4 の倍数である。

(3) a が奇数なら b は 4 の倍数である。 (00 東北大)

16. p, q は共に整数であって，$p^2+q^2\neq 0$ という条件を満たしているとする。$\dfrac{p}{p^2+q^2}$, $\dfrac{q}{p^2+q^2}$ が共に整数であるならば，$p^2+q^2=1$ であることを証明せよ。

(00 北見工業大)

「講義と演習」シリーズ
入試問題編 1　整数の性質
執 筆 者　小浪吉史
発 行 日　平成 14 年 1 月 1 日