「講義と演習」シリーズ　入試問題編 2

整式の性質

小浪吉史

平成 14 年 1 月 1 日

「講義と演習」シリーズについて

巷(ちまた)には数多くの参考書があふれています。しかしそれらはページ数の制約から，また入試問題の解説という目的から，教科書レベルの内容は理解しているものという前提で作られていることが多いようです。

一方最近の教科書は，授業において教師による説明が補われることを期待し，読んだだけで理解できるようにできていないものが多く，少し数学の苦手なものが教科書だけを手がかりに勉強していくことは大変な困難を伴うように見えます。

これは数学は苦手なものの，自ら勉強しなんとかしようという意欲を持つ生徒にとって，大変つらい状況でしょう。

このシリーズは，そういった意欲を持った人に自習教材を提供することを目的に書かれたものです。そしてこの目的を達成するために，授業に相当する講義編と，参考書などで解説されているような演習編で構成しています。

「講義編」の本文ではできるだけストーリー性をもたせ，さまざまな考え方を順に積み重ねていき，それによって数学というものが一つの構築物であることが見えてくるように解説しています。

また本文に入れると話の筋が見えなくなる恐れがあるものの，できることならみなさんに知っておいてもらいたいと思ったテーマを付録で簡単に解説しました。この部分は，これから数学の教員になろう，あるいは現に教えていらっしゃる方々にも場合によったら参考になるかとも思い，かなり踏み込んだものまで取り上げてみました (もともと，本シリーズは私の講義ノートのようなものですから，自分の心覚えという意味もあります)。

演習編は二つの部分に分け,「基礎演習編」では，講義編で扱った例題なども含め，それだけでも順に読み，類題を解いていけば理解できるように編集してみました。

また「入試問題編」では，前半で入試問題を解くときに現れるテクニックを解説し，後半では，内容的に複雑で難しいもの，特に入試問題から取材した問題を提示，解答例を付しました。これは，読者として最終的に理工系の大学，あるいは国公立の文科系の大学への進学を考えている人，あるいは将来数学を道具として使うことが予想される人たちを想定したからです。

しかしながら一言ご注意申し上げます。それは,「入試問題編」は入試問題を題材にしていますが，これは入試の傾向を調べたものではないということです。つ

まりどの問題を選択し，取り上げているかの選択基準には，私の好みがかなり反映しているということです。この点を，あらかじめ御了承ください。

初めて読むときには難しさを感じるかもしれません。しかし2度3度と読むにつれて，それぞれの言葉の意味が頭に定着し，理解が深まっていくことでしょう。あきらめずに何度も読み，何度もチャレンジしてください。

また高校で数学を離れる予定の人は，講義編をしっかり学習するだけでもかなりの効果があると思います。

生身の教師による講義のときは，わからないことが生じたならすぐに質問し，質問者の知識と理解度，性格などにあった答えが得られるのに対して，このような印刷物による講義ではそれは不可能です。逆に通常の講義は一度聞いたらそれっきり，同じことを繰り返し聞くことはたいていの場合不可能であるのに対して，こういった印刷物なら納得がいくまで繰り返し繰り返し読むことができます。この二つのよい点だけが実現できると最高です。そのためには，適当な指導者を見つけ，その人のもとで添削を受けながら勉強すると，より効果的でしょう。

このような特徴をよく理解した上で，本シリーズに取り組んでもらえれば，読者の理解は深まり，センスは一段と向上するであろうと思います。皆さんの健闘を期待し，実力アップを願っています。

小浪　吉史

2002年1月1日

目 次

第1章　基礎テクニック

1.1　はじめに

本分冊は，入試問題編です。一通り高校での数学の学習を終えている，つまり高校3年間で学習する知識を仮定し，入試問題でよく現れる問題を取り上げ，解き方のテクニックを紹介します。それゆえ，問題を解くためにはなんでもあり。使えるものは何でも使うという方針で解説しています。

とはいうものの，例題の選択，そして解答例にはかなり私の好みが反映しています。それゆえ，申し訳ありませんが入試の出題傾向に即しているとは限らないことをお断りしておきます。

1.2　整式の展開

例題 1　$\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)^2$ を展開せよ。　(98 東北学院大)

解説　我々の知っている展開公式の中に，このタイプは含まれていません。しかし，

$$\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)^2=\left\{\left(x^2+\frac{x}{2}\right)+1\right\}^2$$

のように見ることによって公式が適用できます。つまり，$x^2+\frac{x}{2}+1$ のはじめの二つ $x^2+\frac{x}{2}$ を一つのものとみなして計算するわけです。

解答例

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \left\{\left(x^2+\frac{x}{2}\right)+1\right\}^2\\ &= \left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2+2\times\left(x^2+\frac{x}{2}\right)\times 1+1^2\\ &= (x^2)^2+2\times x^2\times\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+2x^2+x+1\\ &= x^4+x^3+\frac{x^2}{4}+2x^2+x+1\\ &= x^4+x^3+\frac{9}{4}x^2+x+1 \quad \cdots\textbf{(答)}\end{aligned}$$

別解　次の式を公式として記憶しておくと，素早く計算できます (よく観察して，式の特徴をつかむように!!　なぜ最後の項が $2ca$ となっているのか?　式を記憶しやすくするためにである)。

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

解答例

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \left(x^2\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2+1^2+2\times x^2\times\frac{x}{2}+2\times\frac{x}{2}\times 1+2\times 1\times x^2\\ &= x^4+\frac{x^2}{4}+1+x^3+x+2x^2\\ &= x^4+x^3+\frac{9}{4}x^2+x+1 \quad \cdots\textbf{(答)}\end{aligned}$$

類題 1 次の式を展開せよ。

(1) $(a+b-c)^2$　　(2) $(2a-b+c)^2$　　(3) $(a-b+c)^2-(a-b-c)^2$

1.3　整式の除法

例題 2　x^3+ax^2+bx+6 を $x-2$ で割ると，商が x^2+x-1 ，余りが 4 となった。$a,\ b$ の値を求めよ。

解説　一般に整式 A を整式 B で割ったときの商を Q ，余りを R とすると，

$$A=BQ+R \quad (\text{ただし } (R \text{ の次数}) < (B \text{ の次数}))$$

という関係が成り立ちます。

この例題では使いませんが，かっこの中のただしがきにも注意を払い，記憶の隅に留めておいてください。

さてこの事実を使うと，与えられた四つの式を使って

$$x^3+ax^2+bx+6=(x-2)(x^2+x-1)+4$$

という関係式を得ます。

右辺を展開すれば，

$$\begin{aligned}(x-2)(x^2+x-1)+4 &= x^3+x^2-x-2x^2-2x+2+4\\ &= x^3-x^2-3x+6\end{aligned}$$

この最後に得られた式と x^3+ax^2+bx+6 が等しくなっています。

ところで二つの整式は対応する次数の係数がそれぞれ等しいとき，同じであると考え，等号で結ばれます（「係数比較の方法」といいます）。

今の場合，ax^2 には $-x^2$，bx には $-3x$ が対応しているので，$a=-1$，$b=-3$ となります。

解答例　問題の設定より

$$x^3+ax^2+bx+6=(x-2)(x^2+x-1)+4=x^3-x^2-3x+6$$

左辺と右辺を比べて，

$$a=-1, \quad b=-3 \ \cdots \textbf{(答)}$$

類題 2　x^3+ax^2+bx+5 を $x+2$ で割ると，商が x^2-3x+3 で余りが -1 となる。$a,\ b$ の値を求めよ。

例題 3　ax^3+b を $(x-2)^2$ で割ると余りが $18x$ であるとき，$a,\ b$ の値を求めよ。　　(96 足利工業大)

解説　文字が入っているので少し計算が面倒になりますが，がんばって $(ax^3+b)\div(x-2)^2$ つまり，$(ax^3+b)\div(x^2-4x+4)$ を計算すると，商が $ax+4a$，余りが $12ax+(b-16a)$ を得ます。

今余りが $18x$ でしたから

$$18x = 12ax + (b-16a)$$

両辺の係数を比較して，

$$18 = 12a,\ 0 = b-16a$$

が得られ，この簡単な連立方程式を解けば，答えが得られます。

解答例　$(ax^3+b)\div(x-2)^2$ を実行すると余りは $12ax+(b-16a)$。

今余りは $18x$ なので，

$$18x = 12ax + (b-16a)$$

両辺の係数を比較して，

$$18 = 12a,\ 0 = b-16a$$

これを解くと，

$$a = \frac{3}{2},\ b = 24 \cdots \textbf{(答)}$$

類題 3　$f(x)=x^3+ax^2+bx+2b$ が $(x-2)^2$ で割り切れるとき，$a,\ b$ を求めよ。　　(96 北海道薬科大)

例題 4　整式 $f(x)$ を x^2-1 で割ったときの余りは $2x+1$ である。このとき $\{f(x)\}^2$ を x^2-1 で割ったときの余りを求めよ。　(95 福岡工業大)

解説　このままでは何の手がかりもありませんから，$f(x)$ を x^2-1 で割ったときの商を $Q(x)$ として，除法の原理を使って表すと，

$$f(x)=(x^2-1)Q(x)+2x+1$$

となります。

今要求されているのは，$\{f(x)\}^2$ を x^2-1 で割ったときの余りですから，上の式の両辺を 2 乗してみます。すると，

$$\{f(x)\}^2=\{(x^2-1)Q(x)+2x+1\}^2$$

で，右辺を展開すると，

$$(\text{右辺})=(x^2-1)^2\{Q(x)\}^2+2(x^2-1)Q(x)(2x+1)+(2x+1)^2$$

となります。

はじめの二つの項は (x^2-1) という因数がありますのでこれで括っておくと，結局

$$\{f(x)\}^2=(x^2-1)Q_1(x)+(2x+1)^2$$

という式が得られました[1]。

よって $\{f(x)\}^2$ を x^2-1 で割ったときの余りは $(2x+1)^2$ である，としたいところですが，ちょっと待ってください。余りの次数は，割る式の次数より本当に小さくなければいけなかったことを思い出してください。今割る式 x^2-1 の次数は 2，余りとしようとした式 $(2x+1)^2$ の次数も 2 です。

ということは，$(2x+1)^2$ は余りではありません。これをさらに x^2-1 で割ると，

$$(2x+1)^2=4(x^2-1)+(4x+5)$$

となることがわかり，結局

$$\{f(x)\}^2=(x^2-1)Q_2(x)+(4x+5)$$

つまり $4x+5$ が余りです。

解答例　$f(x)$ を x^2-1 で割ったときの商を $Q(x)$ とすると，

$$f(x)=(x^2-1)Q(x)+2x+1$$

[1] (x^2-1) で括った残りの式を具体的に書き下すこともできますが，この問題を解くときには必要ないのでここでは $Q_1(x)$ と表しています。

よって，

$$\begin{aligned}\{f(x)\}2 &= \{(x^2-1)Q(x)+2x+1\}^2 \\ &= (x^2-1)Q_1(x)+(2x+1)^2 \\ &= (x^2-1)Q_2(x)+(4x+5)\end{aligned}$$

ただし $Q_1(x),\ Q_2(x)$ は計算した結果得られるある整式。
よって

$$\text{余りは } 4x+5\ \cdots\textbf{(答)}$$

類題 4 $(2x^3+x^2+1)^3$ を x^2-x+1 で割ったときの余りを求めよ。(00 中部大)

類題 5 $f(x)$ を整式とする。$\{f(x)\}^3$ を x^2 で割ったときの余りが $36x+8$ であるとき，$f(x)$ を x^2 で割ったときの余りを求めよ。(98 関東学院大)

1.4　因数分解

例題 5　$x^3+2x^2-9x-18$ を因数分解せよ。　(95 東亜大・デザイン)

解説　与えられた式のままでは，因数分解することができません。しかしはじめの二つの項 x^3 と $2x^2$ は共通因数 x^2 を持ち，後の二つの項 $-9x$ と -18 は -9 という共通因数を持っています。

なんでこんなところに注目するのかといえば，共通因数をくくり出してみればわかるように

$$\begin{aligned} x^3+2x^2 &= x^2(x+2) \\ -9x-18 &= -9(x+2) \end{aligned}$$

となって，共通因数 $x+2$ が見えてきます。

以下解答例をたどってもらえれば大丈夫だと思いますが，それで安心してはいけません。可能な限り因数分解するという，暗黙の了解があります。

解答例

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= x^2(x+2)-9(x+2) \\ &= (x+2)(x^2-9) \\ &= (x+2)(x+3)(x-3) \quad \cdots \textbf{(答)} \end{aligned}$$

類題 6 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3+4x^2-4x-16$　(94 近畿大・九州工)

(2) x^3-x^2-4x+4　(93 静岡理工科大)

(3) $x^3+3x^2-4x-12$　(90 広島修道大・商)

(4) $x^3-x^2y-xz^2+yz^2$　(96 広島文教女子大)

例題 6　x^4-10x^2+9 を因数分解せよ。　(90 広島修道大・商)

解説　特徴のある式ですね。どんな特徴があるかといえば，偶数次の項しかない式なのです。こういった式を「複 2 次式」と呼んでいます。ま，名前はさておき，式の形にびびらないでください。

複 2 次式という名前は，x^4 を $(x^2)^2$ と考えることによって，

$$x^4-10x^2+9=(x^2)^2-10(x^2)+9$$

となり,「x^2 に関する 2 次式」とみなすことができることからきています。

そこで冷静に $(x^2)^2-10(x^2)+9$ を見てみれば，かけて 9，足して -10 となる数が見つかり，公式通りの因数分解ができることに気がつくでしょう。

先の問題と同じく，それで安心してはいけません。

解答例

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (x^2)^2-10(x^2)+9\\ &= (x^2-1)(x^2-9)\\ &= (x+1)(x-1)(x+3)(x-3) \quad \cdots\textbf{(答)}\end{aligned}$$

補注　結果として得られた式 $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$ からわかるように，与えられた x^4-10x^2+9 は x に 1 や 3 を代入すると 0 になります。こういったことに気がついていれば，本例題は，因数定理を用いて因数分解することもできます。
■

類題 7 次の式を因数分解せよ。

(1) x^4+x^2-2　(95 国士舘大・文)

(2) x^4-2x^2-8

(3) $4x^4-17x^2y^2+4y^2$　(89 徳島文理大・家政)

例題 7　x^4+5x^2+9 を因数分解せよ。　(95 山梨学院大・商)

解説　この問題は先の問題のようには解けません。実際，かけて 9，足して 5 となる数は見つからないからです。

ではどうやればよいでしょう?

与えられた式の特徴は，定数が平方数，つまり $9=3^2$ となっていることです。よってもし，x^2 の係数が 6 なら，$x^4+6x^2+9=(x^2+3)^2$ と因数分解することができます。しかし無情にも与式の x^2 の係数は5。

そこで強引ですが,

$$x^4+5x^2+9=x^4+6x^2+9-x^2$$

のように変形します。似たようなことを，2 次関数の平方完成でやっています。

このように変形しておいて，はじめの三つの項を因数分解すれば，平方の差となり，さらに因数分解を進めることができます。

解答例

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= x^4+6x^2+9-x^2\\ &= (x^2+3)^2-x^2\\ &= (x^2+x+3)(x^2-x+3) \quad \cdots\textbf{(答)}\end{aligned}$$

類題 8 次の式を因数分解せよ。

(1) x^4+3x^2+4

(2) x^4-3x^2+1

(3) $x^4-11x^2y^2+y^4$　(94 龍谷大)

例題 8　$x^2y - y^3 + y^2z - x^2z$ を因数分解せよ。(98 国立浜田病院付属看護)

解説　与式はかなり複雑な式に見えます。しかし見方さえ知っていれば，簡単に処理できます。

与式には文字が三つ。それが複雑さを醸し出しているのですが，それぞれの文字に関する次数を見てみましょう。すると，x に関しては 2，y に関しては 3，z に関しては 1 となっています。

このような場合には，最も次数の低い文字に関して整理するのが定跡です。

与式を z に関して整理すると，

$$x^2y - y^3 + y^2z - x^2z = (y^2 - x^2)z + (x^2 - y^2)y$$

(z を含まない項も因数分解していること注意!)

共通因数が見えるでしょうか?

$y^2 - x^2$ と $x^2 - y^2$ は，符号が異なるだけ!　つまり同じである (つまりいずれかをさらに -1 でくくっておけばもっとはっきりするでしょう)。

解答例

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (y^2 - x^2)z - (y^2 - x^2)y \\ &= (y^2 - x^2)(z - y) \\ &= (y + x)(y - x)(z - y) \quad \cdots \textbf{(答)}\end{aligned}$$

類題 9 次の式を因数分解せよ。

(1) $ab + b^2 - a + b - 2$　(99 文化女子大・家政)

(2) $x^2y - 2xyz - y - xy^2 + x - 2z$　(97 つくば国際大)

(3) $x^3 - x^2y - xz^2 + yz^2$　(96 広島文教女子大)

(4) $xyz + x^2y - xy^2 - x + y - z$　(92 日本福祉大・経)

例題 9　$2x^2 + xy - y^2 + 3y - 2$ を因数分解せよ。　(98 日本大)

解説　先の問題と似ていますが，今度はいずれの文字についても次数は2。このような場合には，どちらの文字について整理してもかまいません (しかし今の場合は x で整理したほうがよい。なぜだかわかりますか?)。

x で整理すると，

$$2x^2 + xy - y^2 + 3y - 2 = 2x^2 + yx - (y^2 - 3y + 2)$$

あんまり変化がありませんが，この形にしておかないと計算を進めることができません。

定数項に相当する $y^2 - 3y + 2$ は因数分解できるので，実行すると，

$$2x^2 + xy - y^2 + 3y - 2 = 2x^2 + yx - (y-1)(y-2)$$

x^2 の係数が 2 なので，たすきがけで係数を探すと，解答例のように因数分解できます。

解答例

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= 2x^2 + yx - (y^2 - 3y + 2) \\
&= 2x^2 + yx - (y-1)(y-2) \\
&= (2x - y + 2)(x + y - 1) \quad \cdots\textbf{(答)}
\end{aligned}$$

類題 10 次の式を因数分解せよ。

(1) $abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1$　(98 奈良大・文，社会)

(2) $x^2y^2 + 2x^2y - 3x^2 - 4y^2 - 8y + 12$　(97 倉敷芸科大・産業科学技術)

(3) $2x^2 - 3xy - 2y^2 + x + 3y - 1$　(99 高岡法大・法)

(4) $x^2 - 2y^2 - xy - 2x + 7y - 3$　(97 札幌大・経営)

(5) $6x^2yz + 2xy^2 - 9xz^2 + 3xz - 3yz + y$　(99 松山大・人文)

例題 10　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$ を因数分解せよ。　(99 函館大)

解説　「基礎演習編」で，$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ というタイプの展開を扱いました。実はそこで紹介したテクニックを，ここで使いたかったのでした。

かの場所で解説した方法を使うと，

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$$

というように展開できます。

「因数分解せよ」という問題なのに，展開するとはいささかふに落ちませんが，まずは先を急ぎましょう。

さらに展開を続けると，

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24$$

を得ます。

この形がほしかったのです。元々は $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$ でしたから，ここで定数項を簡約することができ，結局

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)$$

を得ます。

すると x^2+5x が共通因数となっているではありませんか!

後は，解答例だけで理解できるでしょう。

解答例

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24\\ &= (x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24-24\\ &= (x^2+5x)^2+10(x^2+5x)\\ &= (x^2+5x)(x^2+5x+10)\\ &= x(x+5)(x^2+5x+10) \quad \cdots\textbf{(答)}\end{aligned}$$

類題 11 次の式を因数分解せよ。

(1) $(x^2+6x+3)(x^2+6x+7)+4$　(94 創価大)

(2) $(x+1)(x-5)(x^2-4x+6)+18$　(98 札幌大・経営)

(3) $(x-3)(x-1)(x+3)(x+5)+35$　(97 松山大・経)

(4) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)-24$　(94 岐阜女子大・家政)

1.5　因数定理

例題 11　$f(x)$ を x の整式とする。実数 α が方程式 $f(x)=x$ の解であるとき，整式 $f(f(x))-x$ は $x-\alpha$ で割り切れることを示せ。

(94 奈良女子大 (部分))

解説　まずは記号 $f(f(x))$ の意味から説明しましょう。

こういった記号をはじめて見るとちょっとびっくりしますね。しかしよく見ると，もともと整式 $f(x)$ があり，その x の部分に，再び $f(x)$ が入っていることに気がつくと思います。

そう,「講義編」で，整式 $P(x)$ に $a+1$ というような式を代入した例を挙げておきましたが，$f(f(x))$ はこれと同じものなのです。同じ f を使っているので，ややこしく見えるんですね。

つまり，整式 $f(x)$ の x に 整式 $f(x)$ を代入してできる式が $f(f(x))$ というわけです。

もちろんこの問題では $f(x)$ がどんな形の式なのか，与えられていませんから，$f(f(x))$ がどんな形の式になるのかは，わかりません。しかしこういった記号の使い方をすることがある，いや，高度な数学になればなるほど，こういった使い方をするようになるのです。

さて，整式の x に整式を代入したのですから，そのようにしてできあがった式 $f(f(x))$ が整式であることはいいでしょう。で，問題は，$f(f(x))-x$ が $x-\alpha$ で割り切れることを示すことです。

「$x-\alpha$ で割り切れる」ということから，反射的に「因数定理」を思い出すでしょう。そう，結局 $f(f(\alpha))-\alpha=0$ が示せれば，この問題はおしまいというわけです。

そう考えて α に関する条件を見れば,「実数 α は方程式 $f(x)=x$ の解」，つまり α に関しては

$$f(\alpha)=\alpha$$

が成り立っています。これを使えば，後は簡単に $f(f(\alpha))-\alpha=0$ が示すことができます。

解答例　実数 α は方程式 $f(x)=x$ の解なので,

$$f(\alpha)=\alpha$$

ところで,

$$\begin{aligned} f(f(\alpha))-\alpha &= f(\alpha)-\alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって整式 $f(f(x))-x$ は $x-\alpha$ で割り切れる。■

類題 12 $f(x)=x^3-2x^2-x+2,\ g(x)=f(f(f(x)))$ とする。このとき，整式 $g(x)$ は $f(x)$ で割り切れることを証明せよ。 (90 茨城大)

例題 12　整式 $f(x) = x^{20} + ax^{10} + b$ が $x^2 + x + 1$ で割り切れるとき，定数 $a,\ b$ の値を求めよ。　(96 芝浦工業大)

解説　似たような問題を先の例題で取り上げています。しかし本例題では割られる式が $f(x) = x^{20} + ax^{10} + b$ であり，次数が 20 ともものすごく高くなっています。ま，やってやれないことはないでしょうが，こういった式を割るのは避けたいですね。

そこでもう一度問題文を読み直してみると，$x^2 + x + 1$ という式があることに気がつきます。この式を見て何かピンとこないでしょうか?

そう，方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の一つの複素数解を ω とすると，もう一つの複素数解は ω^2 であり，また $\omega^3 = 1$ が成り立っています (つまり ω は1の3乗根です)。

この事実は，受験生にとっては常識といっていいでしょう。

よって整式 $f(x) = x^{20} + ax^{10} + b$ が $x^2 + x + 1$ で割り切れるということは，$f(\omega) = 0,\ f(\omega^2) = 0$ であるということです。

ちょっと不安ですか?

そうですね。普通因数定理を使うときに，代入する数はせいぜいが整数，分数や根号のついた数を代入することはまずないのに，複素数である ω を代入してもいいんでしょうか?

それを確かめるには，因数定理の証明を振り返ってみればいいわけで，そこには代入する数が整数でなければならないとか，実数でなければならないという制限はありません。ということは，どんな数を代入してもいいわけです[2]。

よって「$(x-1)(x-2)$ で割り切れる」といった条件のときと同じように，ω, ω^2 を代入して得られる式から連立方程式を作り，解けばよい，ということになります。

解答例　方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の一つの複素数解を ω とすると，残りの複素数解は ω^2。

いま $f(x)$ は $x^2 + x + 1$ で割り切れるので，

$$f(\omega) = 0,\ f(\omega^2) = 0$$

である。$\omega^3 = 1$ に注意すると，

$$f(\omega) = \omega^{20} + a\omega^{10} + b = \omega^2 + a\omega + b$$

ゆえに

$$\omega^2 + a\omega + b = 0 \ \cdots (1)$$

また

$$f(\omega^2) = (\omega^2)^{20} + a(\omega^2)^{10} + b = \omega + a\omega^2 + b$$

[2] これはちょっと乱暴で,「複素数の範囲内なら」としておきましょう。

よって

$$\omega + a\omega^2 + b = 0 \ \cdots (2)$$

(1)，(2) を連立させて解くと，

$$a = 1,\ b = 1 \ \cdots \textbf{(答)}$$

補注　定数 $a,\ b$ が実数なら，もう少し簡単に算出する方法があります。
$f(\omega) = 0$ より，

$$\omega^2 + a\omega + b = 0$$

で，ω は $x^2 + x + 1 = 0$ の解なので $\omega^2 + \omega + 1 = 0$。つまり $\omega^2 = -\omega - 1$。これを使ってさらに上の式を変形すると，

$$(a-1)\omega + (b-1) = 0$$

を得ます。
ここで ω は虚数で，$a-1,\ b-1$ は実数なので，$a-1=0,\ b-1=0$ でなければならず，$a=1,\ b=1$ という結果を得ます[3]。■

類題 13 $x^{11} - 2x^{10}$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りを求めよ。　(89 明治大)
(**ヒント：**この問題では余り $ax+b$ の係数 $a,\ b$ は実数であるとしていいですね。)

[3] ここの $a,\ b$ の求め方は，$p,\ q$ が有理数のとき，

$$(p - q\sqrt{2}) - (4 + 3\sqrt{2}) = 0$$

を満たす $p,\ q$ を求めよ，というような問題と同じです。

1.6　最大公約数と最小公倍数

例題 13　$P(x) = x^3 - 7x - 6$ と $Q(x) = x^3 - 2ax^2 + 5x + a^2 + 3$ の最小公倍数が 4 次式となるように a の値を定め，その 4 次式を求めよ。　(95 関西大)

解説　まず $P(x)$ を因数分解しておくと，

$$P(x) = (x+1)(x+2)(x-3)$$

となります。

一方二つの整式 $A,\ B$ の最大公約数を D，最小公倍数を L とするとき，

$$AB = DL$$

が成り立っていました。

今 $P(x),\ Q(x)$ の次数はそれぞれ 3，最小公倍数の次数が 4 なので，最大公約数の次数を n とすると，

$$3 + 3 = n + 4$$

つまり最大公約数の次数は 2 であることがわかります。

このことと，$P(x)$ の因数分解を突き合わせて考えると，$Q(x)$ には $x+1,\ x+2,\ x-3$ のうち，二つが因数として含まれることがわかります。

そこで $Q(-1),\ Q(-2),\ Q(3)$ をそれぞれ計算すると，

$$\begin{aligned} Q(-1) &= a^2 - 2a - 3 = (a+1)(a-3) \\ Q(-2) &= a^2 - 8a - 15 \\ Q(3) &= a^2 - 18a + 45 = (a-3)(a-15) \end{aligned}$$

a が 3 のとき $Q(-1)$ と $Q(3)$ が 0 になり，$Q(-2)$ は 0 になりません。よって a は 3。

これを $Q(x)$ に代入して因数分解すれば，最小公倍数も計算できます。

解答例　$P(x),\ Q(x)$ の次数はそれぞれ 3 で，最小公倍数の次数が 4 なので，最大公約数の次数は 2。

また

$$P(x) = (x+1)(x+2)(x-3)$$

よって，$Q(x)$ には $x+1,\ x+2,\ x-3$ のうち，二つが因数として含まれる。

さて，

$$\begin{aligned} Q(-1) &= a^2-2a-3=(a+1)(a-3) \\ Q(-2) &= a^2-8a-15 \\ Q(3) &= a^2-18a+45=(a-3)(a-15) \end{aligned}$$

なので，a が 3 のとき $Q(-1)$ と $Q(3)$ が 0 になり，$Q(-2)$ は 0 にならない。よって

$$a=3 \ \cdots \textbf{(答)}$$

これを $Q(x)$ に代入すると，

$$Q(x)=x^3-6x^2+5x+12=(x+1)(x-3)(x-4)$$

よって最小公倍数は

$$(x+1)(x+2)(x-3)(x-4) \ \cdots \textbf{(答)}$$

類題 14 定数 a に対して，3 次式 $x^3+ax^2+(a-10)x-2a+9$ と x^3-2x^2-5x+6 の最大公約数は 2 次式であり，最高次の項の係数は 1 であるという。このとき，a の値を求めよ。 (94 八戸工業大)

1.7 $(x-\alpha)^2$ で割り切れるための条件

例題 14 α, β を相異なる実数，$f(x)$ を x の実数係数の整式，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表すものとする。

(1) $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ ならば $f(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れることを証明せよ。

(2) $f(\alpha)=f'(\alpha)=f(\beta)=f'(\beta)=0$ ならば $f(x)$ は $(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ で割り切れることを証明せよ。 (94 東京慈恵会医科大)

解説 (1) 本例題の (1) については,「講義編」の付録で解説しています。それを読んでいない方がいるかもしれませんので，ここでは重複を承知で説明しましょう。

実は (1) の条件は，必要十分条件です。つまり例題では

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=0 \text{ ならば } f(x) \text{ は } (x-\alpha)^2 \text{ で割り切れる } \cdots(*)$$

のみの証明が要求されていますが，その逆である，

$$f(x) \text{ が } (x-\alpha)^2 \text{ で割り切れる ならば } f(\alpha)=f'(\alpha)=0 \quad \cdots(**)$$

も成り立ちます。

まずは例題である $(*)$ を見ましょう。

条件 $f(\alpha)=0$ と因数定理から，$f(x)$ が

$$f(x)=(x-\alpha)Q(x)$$

と表されることがわかります。

また，$f'(\alpha)=0$ という条件がありますから，それが使えるように上の式の両辺を x で微分すると，

$$f'(x)=Q(x)+(x-\alpha)Q'(x)$$

となり，$x=\alpha$ を代入すると，

$$0=Q(\alpha)$$

を得ます。

ふたたび因数定理を使えば，$Q(x)$ は

$$Q(x)=(x-\alpha)Q_1(x)$$

と表せます。これを $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ に代入すると，

$$f(x)=(x-\alpha)^2Q_1(x)$$

となり，これは $f(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れることを示しています。
これで $(*)$ が証明できました。

ついでですから，逆である $(**)$ の証明も与えておきましょう (実は後に挙げた類題は，こっちの事実を用います (^^;;)。

$f(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れるとします。すると，

$$f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)$$

と表すことができます。
$x=\alpha$ を代入すると，すぐに

$$f(\alpha)=0$$

であることが出ます。
次に両辺を x で微分すると，

$$f'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)$$

となり，これに $x=\alpha$ を代入すると，

$$f'(\alpha)=0$$

よって $(**)$ が示せました。

(2) (1) からほとんど明らかなように感じられますが，問題として提出されている以上，きちんとした証明を与えなさいということでしょうから，きちんとやりましょう。
まず (1) から，

$$f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)\ \cdots(***)$$

と表すことができます。
ここで，$Q(x)=(x-\beta)^2Q_1(x)$ と表すことができれば，証明が終わることに注意してください。ということは，もう一度 (1) が使えればよいですね。つまり $Q(\beta)=Q'(\beta)=0$ を示せばよいということです。これはすぐできますか?　先の $(**)$ を示すのと同様の方法でできますね。
実際，$(***)$ に $x=\beta$ を代入すると

$$0=(\beta-\alpha)^2Q(\beta)$$

今 $\alpha\neq\beta$ ですから，両辺を $(\beta-\alpha)^2$ で割ることができ，

$$Q(\beta)=0$$

を得ます。

また $(***)$ の両辺を x で微分すると，

$$f'(x) = 2(x-\alpha)Q(x) + (x-\alpha)^2 Q'(x)$$

で，$x=\beta$ を代入すると，

$$0 = 2(\beta-\alpha)Q(\beta) + (\beta-\alpha)^2 Q'(\beta)$$

$Q(\beta)=0$ でしたから，

$$0 = (\beta-\alpha)^2 Q'(\beta)$$

再び両辺を $(\beta-\alpha)^2$ で割って，

$$Q'(\beta) = 0$$

が得られます。

解答例　(1) 条件 $f(\alpha)=0$ と因数定理から，

$$f(x) = (x-\alpha)Q(x)$$

両辺を x で微分すると，

$$f'(x) = Q(x) + (x-\alpha)Q'(x)$$

となり，$x=\alpha$ を代入すると，$f'(\alpha)=0$ だったので，

$$0 = Q(\alpha)$$

ふたたび因数定理を使って，

$$Q(x) = (x-\alpha)Q_1(x)$$

これを $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ に代入すると，

$$f(x) = (x-\alpha)^2 Q_1(x)$$

となり，これは $f(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れることを示している。■

(2) (1) から，

$$f(x) = (x-\alpha)^2 Q(x) \ \cdots (i)$$

これに $x=\beta$ を代入すると，

$$0 = (\beta-\alpha)^2 Q(\beta)$$

今 $\alpha \neq \beta$ なので，両辺を $(\beta-\alpha)^2$ で割ることができ，

$$Q(\beta)=0$$

また (i) の両辺を x で微分すると，

$$f'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)$$

で，$x=\beta$ を代入すると，

$$0=2(\beta-\alpha)Q(\beta)+(\beta-\alpha)^2Q'(\beta)$$

$Q(\beta)=0$ だったので，

$$0=(\beta-\alpha)^2Q'(\beta)$$

再び両辺を $(\beta-\alpha)^2$ で割って，

$$Q'(\beta)=0$$

つまり $Q(\beta)=Q'(\beta)=0$。よって (1) より

$$Q(x)=(x-\beta)^2Q_1(x)$$

と表すことができる。これを (i) に代入すると，

$$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2Q_1(x)$$

つまり $f(x)$ は $(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ で割り切れる。■

類題 15 n を 2 以上の自然数とする。x^n+ax+b が $(x-1)^2$ で割り切れるとき，a, b の値を求めよ。 (96 東北学院大)

類題 16 $f(x)=x^3+ax^2+bx+2b$ が $(x-2)^2$ で割り切れるとき，a, b を求めよ。 (96 北海道薬科大)

第2章　実践問題

2.1　はじめに

入試問題編の後半は，過去の入試問題に取材しました。過去に似たような問題を見つけることができなかったものの，興味深い内容をもつものを紹介しています。ここにも私の好みが反映しています。

それぞれの問題に解答例を与えてみましたが，別解も可能なものもいくつかあります。研究してみてください。

2.2　問題集

1.　x の 4 次式 $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 7x + 3$ について，整数係数の 2 次式 $P(x),\ Q(x)$ で $f(x) = P(x)Q(x)$ を満たすものを一組求めよ。

(00 同志社大 (部分))

2.　n を自然数とし，$f_n(x) = x^{n+1} + (x+1)^{2n-1}$ とする。

(1) $n \geqq 2$ のとき，$f_n(x) - xf_{n-1}(x)$ は $x^2 + x + 1$ で割り切れることを示せ。

(2) $f_n(x)$ は $x^2 + x + 1$ で割り切れることを示せ。　(97 東京女子大)

3.　整式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a,\ b,\ c$ は整数) について考える。次の問いに答えよ。ただし以下では n を整数とする。

(1) $f(x)$ が $(x-n)$ の形の式で割り切れるとき，c は n の倍数であることを示せ。

(2) 整式 $g(x) = x^3 + 7x^2 - x - 3$ は，$(x-n)$ の形の式で割り切れるかどうか理由を述べ判定せよ。

(3) p を素数とする。整数 $a,\ b,\ c$ はすべて p の倍数であるが，c は p^2 の倍数ではないとする。このとき $f(x)$ は $(x-n)$ の形の式で割り切れないことを示せ。

(4) 整式 $h(x) = x^3 + 483x^2 + 1617x + 1071$ は，$(x-n)$ の形の式で割り切れるかどうか理由を述べて判定せよ。　(01 電通大)

4.　3 次多項式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ と 2 次多項式 $g(x) = x^2 + cx + 1$ があり，方程式 $g(x) = 0$ の解はすべて方程式 $f(x) = 0$ の解であるという条件が成り立っている。

(1) $g(x) = 0$ が重解をもつ場合の c の値を求めよ。

(2) $g(x) = 0$ が重解をもたないとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示し，さらに $x = -1$ は $f(x) = 0$ の解であることを示せ。

(3) $a \neq b$ であるならば，$g(x) = 0$ が重解をもつことを示し，さらに $c = -2$ であることを示せ。　(01 お茶の水女子大)

5.　$x^9 - 1$ を $x - 1$ で割ったときの商を $P(x)$ とする。$P(x)$ を $x - 1$ で割ったときの余りを求めよ。

また，$x^9 - 1$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ。　(91 湘南工大)

6.　次の各問いに答えよ。

(1) x の整式 $P(x)$ を $x-1$ で割った余りが1，$x-2$ で割った余りが2，$x-3$ で割った余りが3となった。$P(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割った余りを求めよ。

(2) n は2以上の自然数とする。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について，整式 $P(x)$ を $x-k$ で割った余りが k となった。$P(x)$ を $(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ で割った余りを求めよ。 (99 神戸大)

7. 実数を係数とする x の整式 $P(x)$ を x^2+1 で割ったときの余りを $r(P(x))$ で表すことにする。また，複素数 $\alpha=a+bi$ ($a,\ b$ は実数で，i は虚数単位) に対して $F_\alpha(x)=a+bx$ で整式 $F_\alpha(x)$ を定義する。

(1) 整式 $P(x),\ Q(x)$ に対して $r(P(x)Q(x))=r(r(P(x))r(Q(x)))$ が成り立つことを示しなさい。

(2) 複素数 α が $\alpha\neq 0$ であるとき $r(F_\alpha(x)F_{\frac{1}{\alpha}}(x))=1$ であることを示しなさい。

(3) 整式 $P(x)$ が $r(P(x))\neq 0$ であるとき $r(P(x)Q(x))=1$ を満たす整式 $Q(x)$ が存在することを示しなさい。

(4) $P(x)=2x^5+5x^4+2x^2-2$ のとき $r(P(x)Q(x))=1$ を満たす整式 $Q(x)$ を一つ求めなさい。 (01 前橋工業大)

8. 係数が0か1である x の整式を，ここでは **M 多項式** と呼ぶことにする。整数を係数とする x の整式は，偶数の係数を0でおきかえ，奇数の係数を1でおきかえると M 多項式になる。2つの整式は，このおきかえによって等しくなるとき **合同** であるという。たとえば，$5x^2+4x+3$ と x^2-1 とは対応する M 多項式がともに x^2+1 となるので，合同である。

M 多項式は，2つの1次以上の M 多項式の積と合同になるとき **可約** であるといい，可約でないとき **既約** であるという。たとえば，x^2+1 は $(x+1)^2$ と合同であるから，可約である。

(1) x^2+x+1 は既約な M 多項式であることを示せ。

(2) 1次から3次までの既約な M 多項式をすべて求めよ。

(3) x^4+x+1 は既約な M 多項式かどうか判定せよ。 (00 九州大)

「講義と演習」シリーズ

入試問題編 2	整式の性質
執 筆 者	小浪吉史
発 行 日	平成 14 年 1 月 1 日