「講義と演習」シリーズ　入試問題編 5

式と証明

小浪吉史

平成 14 年 8 月 9 日

「講義と演習」シリーズについて

巷（ちまた）には数多くの参考書があふれています。しかしそれらはページ数の制約から，また入試問題の解説という目的から，教科書レベルの内容は理解しているものという前提で作られていることが多いようです。

一方最近の教科書は，授業において教師による説明が補われることを期待し，読んだだけで理解できるようにできていないものが多く，少し数学の苦手なものが教科書だけを手がかりに勉強していくことは大変な困難を伴うように見えます。

これは数学は苦手なものの，自ら勉強しなんとかしようという意欲を持つ生徒にとって，大変つらい状況でしょう。

このシリーズは，そういった意欲を持った人に自習教材を提供することを目的に書かれたものです。そしてこの目的を達成するために，授業に相当する講義編と，参考書などで解説されているような演習編で構成しています。

「講義編」の本文ではできるだけストーリー性をもたせ，さまざまな考え方を順に積み重ねていき，それによって数学というものが一つの構築物であることが見えてくるように解説しています。

また本文に入れると話の筋が見えなくなる恐れがあるものの，できることならみなさんに知っておいてもらいたいと思ったテーマを付録で簡単に解説しました。この部分は，これから数学の教員になろう，あるいは現に教えていらっしゃる方々にも場合によったら参考になるかとも思い，かなり踏み込んだものまで取り上げてみました (もともと，本シリーズは私の講義ノートのようなものですから，自分の心覚えという意味もあります)。

演習編は二つの部分に分け,「基礎演習編」では，講義編で扱った例題なども含め，それだけでも順に読み，類題を解いていけば理解できるように編集してみました。

また「入試問題編」では，前半で入試問題を解くときに現れるテクニックを解説し，後半では，内容的に複雑で難しいもの，特に入試問題から取材した問題を提示，解答例を付しました。これは，読者として最終的に理工系の大学，あるいは国公立の文科系の大学への進学を考えている人，あるいは将来数学を道具として使うことが予想される人たちを想定したからです。

しかしながら一言ご注意申し上げます。それは,「入試問題編」は入試問題を題材にしていますが，これは入試の傾向を調べたものではないということです。つ

まりどの問題を選択し，取り上げているかの選択基準には，私の好みがかなり反映しているということです。この点を，あらかじめ御了承ください。

初めて読むときには難しさを感じるかもしれません。しかし2度3度と読むにつれて，それぞれの言葉の意味が頭に定着し，理解が深まっていくことでしょう。あきらめずに何度も読み，何度もチャレンジしてください。
また高校で数学を離れる予定の人は，講義編をしっかり学習するだけでもかなりの効果があると思います。

生身の教師による講義のときは，わからないことが生じたならすぐに質問し，質問者の知識と理解度，性格などにあった答えが得られるのに対して，このような印刷物による講義ではそれは不可能です。逆に通常の講義は一度聞いたらそれっきり，同じことを繰り返し聞くことはたいていの場合不可能であるのに対して，こういった印刷物なら納得がいくまで繰り返し繰り返し読むことができます。この二つのよい点だけが実現できると最高です。そのためには，適当な指導者を見つけ，その人のもとで添削を受けながら勉強すると，より効果的でしょう。
このような特徴をよく理解した上で，本シリーズに取り組んでもらえれば，読者の理解は深まり，センスは一段と向上するであろうと思います。皆さんの健闘を期待し，実力アップを願っています。

小浪　吉史

2002年1月1日

目 次

第1章　基礎テクニック

1.1　はじめに

本分冊は，入試問題編です。

本章では，一通り高校での数学の学習を終えている，つまり高校3年間で学習する知識を仮定し，入試問題でよく現れる問題を取り上げ，解き方のテクニックを紹介します。それゆえ，問題を解くためにはなんでもあり。使えるものは何でも使うという方針で解説しています。

とはいうものの，例題の選択，そして解答例にはかなり私の好みが反映しています。それゆえ，申し訳ありませんが入試の出題傾向に即しているとは限らないことをお断りしておきます。

1.2　集　合

例題 1　$A,\ B$ を集合 U の部分集合とするとき，$\overline{\overline{A} \cup (A \cap \overline{B})}$ を簡単にせよ。

解説　似たような問題を講義編で扱いました。ここではもう少し複雑なものをやっておきましょう。

さて集合算の性質は，講義編で列挙しています。確認しておいてください。ここでは，みなさんが集合算の性質をよくしっているものとして，解説します。

さて，かっこのついた式の計算と同じように，順々に簡単な形に変形していきます。

まず $\overline{A}$ と $A \cap \overline{B}$ の和集合 $\overline{A} \cup (A \cap \overline{B})$ の補集合は，ド・モルガンの法則を使うと，$\overline{\overline{A}} \cap \overline{(A \cap \overline{B})}$ と変形できます。

$\overline{\overline{A}}$ は A に等しく，$\overline{(A \cap \overline{B})}$ に再びド・モルガンの法則を適用すれば，$\overline{(A \cap \overline{B})} = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}}$ となるので，$\overline{\overline{A}} \cap \overline{(A \cap \overline{B})}$ は $A \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}})$ です。

また $\overline{\overline{B}} = B$ であり，$A \cap (\overline{A} \cup B)$ に今度は分配法則を適用すると，$(A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$ を得ます。

$A \cap \overline{A} = \phi$ (空集合) と $\phi \cup (A \cap B) = A \cap B$ より，結論が得られます。

数式における変形は通い慣れた道なので，ここでやったように，一々どの計算法則を使っているのか確かめながら変形をしていくことはありません。しかし本来はここでやってみせたようにすべきものですね。集合算にはまだ慣れていないので，特にこういった吟味を各自きちんとやっておくべきでしょう。それがより高度で複雑な式変形を理解し，自分のものとしていくときに役に立ちます。

さあ，一つ一つの変形に，集合算のどのような性質を用いたのか，確認しながらもう一度，下の解答例を解読してみてください。

解答例

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{A} \cup (A \cap \overline{B})} &= \overline{\overline{A}} \cap \overline{(A \cap \overline{B})} \\
&= A \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) \\
&= A \cap (\overline{A} \cup B) \\
&= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) \\
&= \phi \cup (A \cap B) \\
&= A \cap B \ \cdots \textbf{(答)}
\end{aligned}$$

類題 1 $A,\ B$ を集合 U の部分集合とするとき，$\overline{A \cap (\overline{A} \cup B)}$ を簡単にせよ。

例題 2　全体集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ の部分集合を A, B および C とし，$C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ とする。$A\cup B=\{1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\}, \overline{A}\cup\overline{B}=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}, \overline{A\cap\overline{B}}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9\}$ であるとき，$A, B, (\overline{A}\cap B)\cup(\overline{A}\cap C)$ を求めよ。　　（94 国学院大・法）

解説　さてどこから手をつけましょうか。まずは二つの集合 A と B がどのような要素で構成されているのかを突き止めることですね。

しかし一般には A と B には共通部分があるので，まずそこに何があるのかから考えましょう。すると，$\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ という設定がそれを簡単に与えてくれることに気がつきます。

実際ド・モルガンの法則から，$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$ なので，これの補集合をとれば $A\cap B$ を取り出すことができます。よって $A\cap B=\{1,\ 5\}$。

次に，今共通部分 $A\cap B$ が知れたので，A に入っているが，B に入っていない部分，あるいは B に入っているが，A に入っていない部分，式で書けば $A\cap\overline{B}$ か，$B\cap\overline{A}$ がわかれば A か B がわかります。実際，$A=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap B)$ だからです。

そう考えて問題の設定を見ると，$\overline{A\cap\overline{B}}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9\}$ となっています。よってこれから $A\cap\overline{B}$ が簡単に求められ，$A\cap\overline{B}=\{8\}$，つまり $A=\{1,\ 5,\ 8\}$ を得ます。

また，$B\cap\overline{A}=(A\cup B)\cap\overline{A}$ より，$B\cap\overline{A}=\{2,\ 7,\ 9\}$。ゆえに $B=\{1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 9\}$。

あとは解答例から明らかでしょう。

補注　上の解説に出てきた二つの等式，$A=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap B)$ と $B\cap\overline{A}=(A\cup B)\cap\overline{A}$ を確かめておいてください。■

解答例

$$\begin{aligned} A\cap B &= \overline{\overline{A\cap B}} \\ &= \overline{\overline{A}\cup\overline{B}} \\ &= \overline{\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}} \\ &= \{1,\ 5\} \end{aligned}$$

次に

$$\begin{aligned} A\cap\overline{B} &= \overline{\overline{A\cap\overline{B}}} \\ &= \overline{\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9\}} \\ &= \{8\} \end{aligned}$$

よって $A=\{1,\ 5,\ 8\}$。

また，$B\cap\overline{A}=(A\cup B)\cap\overline{A}$ より，$B\cap\overline{A}=\{2,\ 7,\ 9\}$。ゆえに $B=\{1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 9\}$ となる。

最後に $\overline{A}\cap B=\{2,\ 7,\ 9\}$, $\overline{A}\cap C=\{2,\ 4,\ 6\}$ であるから，$(\overline{A}\cap B)\cup(\overline{A}\cap C)=\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9\}$。

$$\begin{aligned} A &= \{1,\ 5,\ 8\}, \\ B &= \{1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 9\}, \\ (\overline{A}\cap B)\cup(\overline{A}\cap C) &= \{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9\} \end{aligned}$$

類題 2 集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ の部分集合 $A,\ B$ について $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1\}$，$A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap B=\{4,\ 6\}$ であるとき，$A,\ B$ を求めよ。

（94 聖徳学園岐阜教育大）

1.3　命　題

例題 3　命題

$$x \geqq 1 \text{ かつ } y \geqq 1 \text{ ならば } x^2 + y^2 \geqq 2$$

の逆，裏，対偶をそれぞれ述べよ。　(98 岩手大)

解説　命題「$p \longrightarrow q$」に対して，命題 p を仮定，命題 q を結論といいました。

また，命題「$p \longrightarrow q$」に対して，その逆，裏，対偶というのは

$$\begin{array}{ll} \text{逆} & q \longrightarrow p \\ \text{裏} & \overline{p} \longrightarrow \overline{q} \\ \text{対偶} & \overline{q} \longrightarrow \overline{p} \end{array}$$

でした。

ここで $\overline{p}$ などは，命題 p の否定を表します。

また「ド・モルガンの法則」と呼ばれる，次の定理が成り立ちました。

定理 (ド・モルガン)

$$\begin{array}{ccc} \overline{p \text{ かつ } q} & \Longleftrightarrow & \overline{p} \text{ または } \overline{q} \\ \overline{p \text{ または } q} & \Longleftrightarrow & \overline{p} \text{ かつ } \overline{q} \end{array}$$

さて，まず例題に与えられている命題

$$x \geqq 1 \text{ かつ } y \geqq 1 \text{ ならば } x^2 + y^2 \geqq 2$$

の仮定と結論は何でしょう。そう，仮定は「$x \geqq 1$ かつ $y \geqq 1$」，結論は「$x^2+y^2 \geqq 2$」です。

よって，逆命題を作るのは容易でしょう。

次に，裏と対偶命題を作るために，仮定と結論，それぞれの否定命題を作りましょう。仮定は「$x \geqq 1$ かつ $y \geqq 1$」で,「かつ」が入っているので，否定命題を作るときにド・モルガンの法則を使います。

実行すると

$$x \geqq 1 \text{ でない または } y \geqq 1 \text{ でない}$$

「$x \geqq 1$ でない」は「$x < 1$」と書き換えられます。同様にして「$y \geqq 1$ でない」は「$y < 1$」となります。すなわち，仮定の否定は

$$x < 1 \text{ または } y < 1$$

となります。
　同様にして，結論の否定が作れるので，答えが得られます。

解答例　逆：$x^2+y^2 \geqq 2$ ならば $x \geqq 1$ かつ $y \geqq 1$
　裏：$x<1$ または $y<1$ ならば $x^2+y^2<2$
　対偶：$x^2+y^2<2$ ならば $x<1$ または $y<1$

補注　実は $x \geqq 1$ の否定を作るときにも，ド・モルガンの法則を使っています。実際，$x \geqq 1$ は「$x>1$ または $x=1$」なので，否定するとド・モルガンの法則から

$$x>1 \text{ でない かつ } x \neq 1$$

　一方，二つの数 a, b については $a>b$, $a=b$, $a<b$ のいずれか一つが必ず成り立ちます。これを x と 1 に適用すると $x>1$ か $x=1$ か $x<1$ のいずれかであり，上の否定命題からはじめの二つが除かれます。つまり $x<1$ が成り立つのです。■

類題 3　命題

$$\text{(P) } |x|+|y| \leqq 1 \text{ かつ } y>x^2 \text{ ならば } y>x^4 \text{ または } y \leqq 1$$

は真である。このとき，命題 (P) の逆，裏，対偶を述べよ。
(93 宮崎公立大 (改))

例題 4　n を整数とするとき，n^2 が 5 の倍数ならば n は 5 の倍数であることを証明せよ。　(98 福岡教育大)

解説　逆命題の真偽は，元の命題の真偽と一致するとは限りませんでした (「逆は必ずしも真ならず」) が，対偶の真偽は元の命題のそれと一致しました。この後半の事実は，与えられた命題を直接証明するのが難しいときによく使われるテクニックです。つまり，直接証明することが難しい命題は，その対偶が証明できればそれで真であることが保証されるわけです。

さて，本例題はどうでしょう。

この命題の逆，つまり「n が 5 の倍数ならば n^2 は 5 の倍数である」の証明はやさしい (やってみよ!)。しかし例題で与えられているような命題は，直接証明は難しいですね。そこで対偶命題を作ってみましょう。

対偶命題は，元の命題の仮定と結論を否定して，さらにそれを入れ換えることでできました。これより対偶は，次のようになることが分かります。

「n が 5 の倍数でないならば n^2 は 5 の倍数ではない」

これは簡単に証明できるでしょうか?

場合分けが少し多くなりますが，難しくはありません。

実際,「n が 5 の倍数でない」ということは,「n が 5 で割り切れない」ということ。つまり，5 で割ったときの余りが 1，2，3，4 のいずれかであるということです。

以下，それぞれの場合について検討していけばよいことになります。これは手間はかかりますがそんなに面倒ではありません。

たとえば，5 で割ったときの余りが 1 であるということは，k を整数として

$$n = 5k + 1$$

と表せるということです。そこで n^2 を計算すると，

$$\begin{aligned} n^2 &= (5k+1)^2 \\ &= 25k^2 + 10k + 1 \\ &= 5(5k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

k は整数だったので $5k^2 + 2k$ も整数なので，最後の式の形 $5(5k^2 + 2k) + 1$ から，n^2 を 5 で割ると 1 余る，つまり 5 の倍数ではないことが結論されます。

残りの三つについても同様に計算すればいいわけです。

が，これは結構面倒です。じゃっかんであるが，簡単になる方法があるので，こちらを解答例として紹介することにしましょう。

上で触れたように，5 で割りきれない数は余りが 1，2，3，4 のいずれかなのですが，たとえば 3 余る数 n は，$n = 5k + 3$ と書け，さらに $n = 5(k+1) - 2$ と変形できます。ここで $k+1$ を改めて k と書くことにすれば，$n = 5k - 2$ と表すことができます。

5 で割って 4 余る数についても同様に考えれば，$n = 5k - 1$ と表すことができることがわかるでしょう。以上をまとめると，5 で割り切れない数は $5k \pm 1$，$5k \pm 2$ というように，非常に対称性のよい形に表すことができるわけです。

そこで複号同順で計算すれば，$5k \pm 1$ の場合は

$$\begin{aligned} n^2 &= (5k \pm 1)^2 \\ &= 5(5k^2 \pm 2k) + 1 \end{aligned}$$

となって，これら二つの場合を同時に証明することができ，表現がかなり簡略化できます。

このテクニックはいつでも使えるわけではありませんが，覚えておいて損はありません。

補注　「複号同順」とは，たとえば

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b \quad (\text{複号同順})$$

のように使いますが，これは，上のはじめに上の符号を読んだら，後はすべて上の符号を取って読むという意味で，上の式は

$$\begin{aligned} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

の二つの式を同時に表しています。

これには

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3 \quad (\text{複号同順})$$

のように，$+-+$ あるいは $-+-$ のように読むべき式もあります。■

解答例　対偶命題「n が 5 の倍数でないならば n^2 は 5 の倍数ではない」を証明する。

n が 5 の倍数でないとき，n は整数 k を用いて (I) $n = 5k \pm 1$，(II) $n = 5k \pm 2$ と表すことができる。

(I) $n = 5k \pm 1$ の場合

$$\begin{aligned} n^2 &= (5k \pm 1)^2 \\ &= 5(5k^2 \pm 2k) + 1 \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

よって n^2 を5で割ったときの余りはいずれの場合も1。つまり5で割り切れない。
(II) $n = 5k \pm 2$ の場合

$$\begin{aligned} n^2 &= (5k \pm 2)^2 \\ &= 5(5k^2 \pm 4k) + 4 \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

よって n^2 を5で割ったときの余りはいずれの場合も4。これも5で割り切れない。
(I), (II) より，いずれの場合も「n が5の倍数でないならば n^2 は5の倍数ではない」が成り立つ。

類題 4 s を正の整数とする。s^2 が奇数であれば，s は奇数であることを証明せよ。(96 甲南大・文 (部分))

類題 5 整数 m の平方が3の倍数ならば，m は3の倍数であることを，対偶によって証明せよ。 (99 富山県立大・工)

例題 5　実数 x について，条件「$-1 < x \leqq 2$」の否定をいえ。
(00 立教大 (部分))

解説　条件「$-1 < x \leqq 2$」は「p かつ q」の形，つまり「$-1 < x$」かつ「$x \leqq 2$」の省略形ですね。知らなかった人はここできちんと頭の中に入れておいてください。

「p かつ q」の否定は，ド・モルガンの法則から「p でないまたは q でない」ですから,「『$-1 < x$ でない』または『$x \leqq 2$ でない』」，つまり

$$-1 \geqq x \text{ または } x > 2$$

となります。ちょっとかっこが悪いので，解答例では書き直しておきましょう。

解答例

$$x \leqq -1 \text{ または } 2 < x \quad \cdots \textbf{(答)}$$

類題 6　$a,\ b$ を実数とするとき，条件「$ab > 0$ かつ $a + b \geqq 1$」の否定をいえ。
(99 立教大)

1.4　恒等式

例題 6　整式 x^3+ax^2+bx+3 を x^2-x-12 で割った余りが $4x+3$ になるとき，$a,\ b$ の値，および商を求めよ。 (90 東海大・工)

解説　解き方は二つあります。

一つは実際に割り算をし，余りの係数を比較する方法。もう一つは剰余の定理を使う方法です。剰余の定理は現在のカリキュラムでは数学 B で学習するので，未習のものは読み飛ばしてかまいません。

まず実際に割り算をするほうを解説しましょう。

係数に文字が入っているのでいささか計算が面倒ですが，めげずに実行してください。実行すると，

$$
\begin{array}{r|llll}
 & x & +(a+1) & & \\
\cline{2-5}
x^2-x-12 & x^3 & +ax^2 & +bx & +3 \\
 & x^3 & -x & -12x & \\
\cline{2-5}
 & & (a+1)x^2 & +(b+12)x & +3 \\
 & & (a+1)x^2 & -(a+1)x & -12(a+1) \\
\cline{3-5}
 & & & (a+b+13)x & +12a+15
\end{array}
$$

つまり，余りは $(a+b+13)x+12a+15$。題意よりこれが $4x+3$ になるので，

$$4x+3=(a+b+13)x+12a+15$$

これは x に関する恒等式なので，係数を比較して

$$\begin{cases} a+b+13=4 \\ 12a+15=3 \end{cases}$$

を得ます。

後はこれを解けばいいわけです。

もう一つの方法は，いつでも使えるわけではありませんが，問題で与えられている x^2-x-12 という式は $x^2-x-12=(x+3)(x-4)$ と因数分解できるので，剰余の定理を使う解法が考えられます。

整式 A を整式 B で割ったときの商を Q，余りを R とすると

$$A=BQ+R \qquad (R \text{ の次数})<(B \text{ の次数})$$

という関係式が成り立ちました。

よって x^3+ax^2+bx+3 を x^2-x-12 で割ったときの商を $Q(x)$ とすると，

$$x^3+ax^2+bx+3=(x^2-x-12)Q(x)+(4x+3)$$

となります。
　ところで，剰余の定理とは

定理　整式 $P(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの余りは $P(\alpha)$ に等しい。

というものです。
　問題における割る式は 2 次式なので，この定理は直接使えません。しかし先に触れたように，x^2-x-12 は $(x+3)(x-4)$ と因数分解できます。そこで $x+3$ や $x-4$ で割ったときの余りを考えると，上の等式

$$x^3+ax^2+bx+3=(x^2-x-12)Q(x)+(4x+3)$$

から $a,\ b$ に関する方程式が得られます。
　実際 x^3+ax^2+bx+3 を $x+3$ で割ったときの余りは，この式に $x=-3$ を代入したものに等しい。これは $9a-3b-24$ に等しい。また右辺に代入すると x^2-x-12 は 0 になるので，$4x+3$ に $x=-3$ を代入したものになります。よって -9。これらは等しいので

$$9a-3b-24=-9$$

という式を得ます。
　同様にして $x-4$ で割ったときの余りを考えれば，

$$16a+4b+67=19$$

　後はこれらを連立させて解けばよい。

解答例　その 1
　割算を実行すると，

$$
\begin{array}{r|llll}
 & x & +(a+1) & & \\
\hline
x^2-x-12 & x^3 & +ax^2 & +bx & +3 \\
 & x^3 & -x & -12x & \\
\hline
 & & (a+1)x^2 & +(b+12)x & +3 \\
 & & (a+1)x^2 & -(a+1)x & -12(a+1) \\
\hline
 & & & (a+b+13)x & +12a+15
\end{array}
$$

　余りが $4x+3$ なので

$$4x+3=(a+b+13)x+12a+15$$

係数を比較して

$$\begin{cases} a+b+13=4 \\ 12a+15=3 \end{cases}$$

これを解いて

$$a=-1,\ b=-8 \quad \cdots(\textbf{答})$$

解答例　その 2

x^3+ax^2+bx+3 を x^2-x-12 で割ったときの商を $Q(x)$ とすると，

$$x^3+ax^2+bx+3=(x^2-x-12)Q(x)+(4x+3)$$

$x=-3$ を代入して整理すると

$$4a+b=-12$$

$x=4$ を代入して整理すると

$$3a-b=5$$

これらを連立させて解くと，

$$a=-1,\ b=-8 \quad \cdots(\textbf{答})$$

補注　解答例を見ると，その 2 のほうが簡単そうに見えますが，解説で説明した計算を自分で実行してみればわかるように，こっちのほうが面倒です。

どちらの方法を選んだらいいか，問題中の式をよく観察して決めることになります。■

類題 7 $a,\ b$ を定数とする。整式 $x^4+3x^3+ax^2+bx+4$ を x^2+2x+3 で割ると，余りは $5x+7$ であった。$a,\ b$ の値を求めよ。　(98 広島市立看護専門)

例題 7　$2x^3+x-2=2(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$ が恒等式となるように，定数 $a,\ b,\ c$ の値を定めよ。　(93 北海道工業大 (改))

解説　右辺が「$x-1$ に関する多項式」になっているのはちょっと面白い形です。これがこの問題自身の出どころを暗示しています。実は微積分のある理論と関係していて，興味深いテーマになっています。

それはさておき，ここでは恒等式に関する計算練習問題です。

恒等式の係数を決定する基本的な方法は,「講義編」で紹介していますが，係数比較するか，適当な数を代入するかのいずれかで $a,\ b,\ c$ の連立方程式を作りそれを解くものでした。

今の場合はどちらが簡単でしょう。

右辺がちょっと特殊な形をしていることに注目しましょう。

すると，x に 1 を代入すればすぐに c が出てくることに気がつくでしょう。簡単な計算で,

$$c=1$$

を得ます。

残り二つについては，上のいずれの方法を用いても簡単に求められるのですが,ここでは異なる方法で計算してみます。

与えられた式の両辺に上の $c=1$ を代入すると,

$$2x^3+x-2=2(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+1$$

右辺の 1 を移項して整理すると,

$$2x^3+x-3=2(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)$$

右辺は $x-1$ でくくれるので，因数分解しておくと,

$$2x^3+x-3=(x-1)\{2(x-1)^2+a(x-1)+b\}$$

この式から，左辺は $x-1$ を因数にもつことが結論できます。因数分解を実行すると

$$(x-1)(2x^2+2x-3)=(x-1)\{2(x-1)^2+a(x-1)+b\}$$

ということは，左辺の 2 番目の因数である $2x^2+2x-3$ と右辺の 2 番目の因数である $2(x-1)^2+a(x-1)+b$ は等しくなければなりません。よって

$$2x^2+2x-3=2(x-1)^2+a(x-1)+b$$

これは!

そう，両辺とも次数が 1 下がり，かつ問題と同じような形をしています。つまり同じ手法が使える!!

もう一度 $x=1$ を代入すると b がすぐに計算でき，$b=7$ を得ます (計算してください)。これを

$$2x^2+2x-3=2(x-1)^2+a(x-1)+b$$

に代入して，移項整理をすれば，

$$(x-1)(2x-4)=(x-1)\{2(x-1)+a\}$$

となり (計算!),

$$2x-4=2(x-1)+a$$

あとはもう一度同じことをくり返せばいいわけです。

途中の計算に割り算が入るので，そんなに簡単に感じられませんか?　合成関数の微分法を知っている方には，もう少し簡単な方法があることをお教えしておきましょう[1]。

それは次のように計算するものです。

$c=1$ を得て，代入し整理した

$$2x^3+x-3=2(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)$$

で，両辺を x で微分します (右辺の微分は合成関数の微分になっています)。すると

$$6x^2+1=6(x-1)^2+2a(x-1)+b$$

となり，$x=1$ を代入することで，$b=7$ がすぐに得られます。

以下これをくり返すというものです。

解答例　与えられた等式の両辺に $x=1$ を代入して計算すると，

$$c=1$$

を得る。これを与式に代入して整理すると，

$$2x^3+x-3=2(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)$$

両辺とも $x-1$ で割り切れ，その商は等しい。よって

$$2x^2+2x-3=2(x-1)^2+a(x-1)+b$$

[1]組み立て除法を用いれば，実際にはそんなに手間ではありません。また，必ず割り切れることが分かっているのですから，計算間違いがないかどうかもチェックできます。

ふたたび $x=1$ を代入すると

$$b=7$$

以下同様にして，

$$2x-4=2(x-1)+a$$

が得られ，結局

$$a=-2$$

ゆえに

$$a=-2,\ b=7,\ c=1 \quad \cdots \textbf{(答)}$$

類題 8 等式 $x^3=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$ が，x についての恒等式となるように定数 $a,\ b,\ c,\ d$ の値を定めよ。 (98 秋田大)

例題 8　整式 $f(x)$ が x についての恒等式

$$xf(x^2-1)-5f(x)=(x^3+1)f(x-1)-2(x-1)f(x+1)-4x-29$$

を満たすとする。このとき次の各問いに答えよ。

(1) $f(0),\ f(1),\ f(-1)$ の値を求めよ。

(2) $f(x)$ の次数を求めよ。

(3) $f(x)$ を求めよ。 (00 宮崎大)

解説　式の決定問題です。しかし問題の設定通りに計算していけば，そんなに困難はないでしょう。知らないと難しいのは (2) くらいでしょうか。

(1) は素直に与えられた等式に $x=0,\ 1,\ -1$ を代入すれば，$f(0),\ f(1),\ f(-1)$ に関する連立方程式が得られますから，それを解けば解決します。3元連立方程式の解き方を忘れてしまった人は，講義編「方程式の解法」を読んでください。

問題は (2) ですね。

多項式の次数に関して次の公式が成り立ちます (多項式 $f(x)$ の次数を $\deg f(x)$ で表しています。次数＝degree です)。

$$\begin{aligned}\deg f(x)g(x) &= \deg f(x)+\deg g(x)\\ \deg f(g(x)) &= \deg f(x)\times\deg g(x)\end{aligned}$$

つまりふたつの多項式をかけたものの次数はそれらの次数の和ですし，１つの多項式に別の多項式を代入したものの次数は，それらの次数の積になるということです。

これらの公式は多項式についていっていますが，多項式の次数がそれを構成する単項式の最高次数として定義されていますので，単項式について確かめれば OK です。

よく知っている「指数法則」から，

$$\begin{aligned}x^m\times x^n &= x^{m+n}\\ (x^m)^n &= x^{mn}\end{aligned}$$

が成り立っていますから，これらの公式の正しいことがすぐにわかります。

また，

$$\deg\{f(x)\pm g(x)\}=\max\{\deg f(x),\ \deg g(x)\}$$

です ($\max\{a,\ b\}$ は a と b の大きい方の値をとれという関数です)。つまり，多項式の和や差の次数は，大きい方の次数です (具体例で確かめてください)。

問題に戻りましょう。

与えられた等式は恒等式ですから，左辺の式の次数と右辺の式の次数は当然のことながら等しくなっています。

まず左辺の次数を計算しましょう。

第 1 項 $xf(x^2-1)$ の次数ですが，$\deg f(x) = n$ とすれば，$f(x^2-1)$ の次数は $2n$ なので $\deg xf(x^2-1) = 2n+1$ となります。一方 $5f(x)$ の次数は n。当然 $2n+1 > 5$ ですから，左辺の次数は $2n+1$ であると結論できます。

同じようにして右辺の次数を計算すると，$n+3$ になることがわかります (確かめてください!)。

よって

$$2n+1 = n+3$$

これを解くと $n=2$ を得ます。

これでなぜ (1) で三つの x での $f(x)$ の値を求めさせていたのかが分かりましたね。$\deg f(x) = 2$ ですから $f(x) = ax^2+bx+c$ とおくことができて，(1) で求めた結果から $a,\ b,\ c$ を計算すればいいわけです。細かいことですが，$f(0)$ が分かっていますから c ははじめからその値としていいですね。

解答例　(1) 与式で $x=0$ とすると，

$$-5f(0) = f(-1)+2f(1)-29 \quad \cdots(1)$$

$x=1$ とすると，

$$f(0)-5f(1) = 2f(0)-33 \quad \cdots(2)$$

$x=-1$ とすると，

$$-f(0)-5f(-1) = 4f(0)-25 \quad \cdots(3)$$

(1), (2), (3) を連立させて解くと，

$$f(0)=3,\ f(1)=6,\ f(-1)=2 \quad \cdots\textbf{(答)}$$

(2) $f(x)$ の次数を n とすると，左辺の次数は $2n+1$，右辺のそれは $n+3$。よって

$$2n+1 = n+3$$

これを解いて

$$n=2 \quad \cdots\textbf{(答)}$$

(3) (1), (2) の結果から，

$$f(x) = ax^2+bx+3$$

としてよい。$f(1)=6,\ f(-1)=2$ より，

$$\begin{cases} a+b+3=6 \\ a-b+3=2 \end{cases}$$

これを解いて，

$$a=1,\ b=2$$

ゆえに

$$f(x)=x^2+2x+3 \quad \cdots \textbf{(答)}$$

類題 9 ある x の整式 $f(x)$ に対して，x がどんな値をとってもつねに

$$f(x^2)=x^3f(x+1)-2x^4+2x^2$$

が成り立つとき，$f(0)=f(1)=f(2)=0$ であることを示せ。次に $f(x)$ を求めよ。 (90 中部大)
(**ヒント：** $x^3f(x+1)$ と $-2x^4+2x^2$ はどちらの次数が高いでしょうか。)

1.5 等式の証明

例題 9　$a+b+c=0$ のとき，等式 $a^3+b^3+c^3=3abc$ が成り立つことを証明せよ。 (99 倉敷芸術科学大)

解説　等式を証明する方法には，大別して

(I) $A=\cdots=B$ を示す。

(II) $A-B=\cdots=0$ を示す。

(III) $A=\cdots=C,\ B=\cdots=C$ を示す。

の三つがあります。

また，本例題のように，$a+b+c=0$ というような条件がある場合は，それを使って，一つでも文字を消すことを考えることになります。

解答例では c を消去し， (III) の方法を用いて，証明しています。

別解として，$a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解する方法があります。昔はこの公式が受験生の常識とされてきましたが，今はそうでもないようです。

これを用いれば

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$$

と簡単に証明できます。

まあ，解答例のように計算できればそれで充分です。

解答例　$a+b+c=0$ より $c=-a-b$。

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= a^3+b^3+(-a-b)^3\\ &= a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3\\ &= -3a^2b-3ab^2\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= 3ab(-a-b)\\ &= -3a^2b-3ab^2\end{aligned}$$

ゆえに

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

類題 10 $xyz=1$ ならば

$$\frac{x}{xy+x+1}+\frac{y}{yz+y+1}+\frac{z}{zx+z+1}=1$$

が成り立つことを証明せよ。 (国立横浜病院付属看護)

例題 10　$x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ ならば，$x,\ y,\ z$ のうち少なくとも一つは1であることを証明せよ。　(95 法政大・文)

解説　何を証明すればよいのか，すぐに思いつくでしょうか？　「$x,\ y,\ z$ のうち少なくとも一つは1である」を式で表すとどうなるだろう？　ひとまず「少なくとも一つ」というのを無視すれば,「$x,\ y,\ z$ は1である」となります。これは $x=1,\ y=1,\ z=1$ と表すことができます。そして「少なくとも一つ」ということを考慮すると,「$x=1$ または $y=1$ または $z=1$」となります。これは言い替えれば「$x-1=0$ または $y-1=0$ または $z-1=0$」。

ここで $ab=0 \iff a=0$ または $b=0$ であったことを思い出してください。これは a と b の二つの場合でしたが，前にも注意したように，いくつあっても同じです。すなわち

$$a_1a_2\cdots a_n=0 \iff a_1=0 \text{ または } a_2=0 \text{ または } \cdots \text{ または } a_n=0$$

です。

ここは $n=3$ なので,

$$x-1=0 \text{ または } y-1=0 \text{ または } z-1=0 \iff (x-1)(y-1)(z-1)=0$$

となり，$(x-1)(y-1)(z-1)=0$ を証明すればよいことになります。

これで何を証明すればよいのかは分かったが，仮定である $x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ はどのように使ったらよいでしょう。。仮定のまんなかの辺は分数式であり，証明すべき $(x-1)(y-1)(z-1)=0$ には分数式は出てこないので，このままでは使えません。そこでまんなかの辺の式を通分してみると,

$$\frac{xy+yz+zx}{xyz}$$

となります。これが1に等しいので

$$\frac{xy+yz+zx}{xyz}=1$$

の両辺に xyz をかけて分母を払うと

$$xy+yz+zx=xyz$$

という式が得られます。つまり仮定である $x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ は

$$x+y+z=1,\ xy+yz+zx=xyz$$

という式に変形できたわけです。

これだけの準備の下で $(x-1)(y-1)(z-1)$ を計算してみましょう。

$$(x-1)(y-1)(z-1) = xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1$$

うまく仮定を変形した $x+y+z=1,\ xy+yz+zx=xyz$ が現れました[2]。

解答例にまとめましょう。

解答例　仮定より $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$。通分して分母を払うと

$$xy+yz+zx=xyz$$

$$\begin{aligned}(x-1)(y-1)(z-1) &= xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1\\ &= (xy+yz+zx)-(xy+yz+zx)+1-1\\ &= 0\end{aligned}$$

よって

$$x-1=0 \text{ または } y-1=0 \text{ または } z-1=0$$

すなわち $x,\ y,\ z$ のうち少なくとも一つは 1 に等しい。

類題 11 $\dfrac{ax+by}{a+b}=\dfrac{x+y}{2}$ ならば，$a=b$ または $x=y$ であることを証明せよ。

[2] 実は逆で，$(x-1)(y-1)(z-1)$ を展開した $xyz-xy-yz-zx+x+y+z-1$ を見ながら，仮定が使えないかどうかを検討すると，上のような変形を思いつくのです。

例題 11　$x^2+y^2+x^2+3=2(x+y+z)$ ならば，$x,\ y,\ z$ はすべて 1 に等しいことを証明せよ。

解説　先と同じような問題ですが，今度は「すべて 1 に等しい」ことの証明です。いくつもの数が同時に何かに等しいことをいうことのできるようなものがあったでしょうか?

次の定理を思い出しましょう。

定理 (平方の和)　$a_1,\ \cdots,\ a_n$ を実数とするとき

$$a_1^2+\cdots+a_n^2 \geqq 0$$

特に

$$a_1^2+\cdots+a_n^2=0 \iff a_1=\cdots=a_n=0$$

この定理の「特に」の部分に注目しましょう。

$$a_1^2+\cdots+a_n^2=0 \iff a_1=\cdots=a_n=0$$

となっており，同時に 0 であることが言えています。

よって「$x,\ y,\ z$ がすべて 1 に等しい」ことを証明するには

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0$$

を証明すればよいことが分かります (きちんと説明せよ)。

そこで次に仮定を見ましょう。仮定は $x^2+y^2+x^2+3=2(x+y+z)$ 。

右辺を移項すると

$$x^2-2x+y^2-2y+z^2-2z+3=0$$

もう気がついたでしょう。おなじみの x^2-2x などが出てきています。これがあれば平方完成したくなります。そして，うまいことに 3 が左辺にはあり，

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0$$

ができるではありませんか！

解答例にまとめましょう。

解答例　仮定より $x^2+y^2+x^2+3=2(x+y+z)$ 。

移項して整理すると，

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0$$

よって
$$x-1=y-1=z-1=0$$
ゆえに
$$x=y=z=1$$
つまり $x,\ y,\ z$ はすべて 1 に等しい。

類題 12 $a^2+b^2+2 \leqq 2(a+b)$ ならば，$a=b=1$ であることを証明せよ。

(94 明治大・政治経済)

1.6　不等式の証明

例題 12　$a,\ b,\ c$ を実数とするとき，

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$$

を証明せよ。　(97 東北学院大・経 (部分))

解説　不等式 $a > b$ を証明するには，

$$a - b > 0$$

を証明すればよい (等号のついた不等式 $a \geqq b$ も同様)。これは等式 $A = B$ を証明するには $A - B = 0$ を証明すればよかったのと同様です。

問題はここからで，不等式の証明は結構面倒に感じられますが，その原因は $a-b > 0$ を証明するために様々な方法があるからです。ここからの何題かで，その方法のいくつかを紹介しましょう。

本例題では，次の定理を用います。

定理　$a_1,\ a_2,\ \cdots a_n$ を実数とするとき，

$${a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2 \geqq 0$$

ここではもっとも一般的な形で書きましたが，要は，$a - b$ が平方和に変形できればラッキー，というわけです。

では本例題はどうでしょう?

(左辺) − (右辺) を計算すると

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)$$

つまり

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

これは一見どうにもならないように感じられるかもしれません。しかしもし ab の係数が 2 なら，$a^2 + b^2 - 2ab$ で，これは $(a - b)^2$ と変形できます。そこで，強引に ab の係数を 2 にしてみましょう。帳尻を合わせるには ab を加えておけばいいですね。

すると，

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\ &= a^2 - 2ab + b^2 + c^2 + ab - bc - ca \\ &= (a - b)^2 + c^2 + ab - bc - ca\end{aligned}$$

となります。しかし $c^2+ab-bc-ca$ という項が残ってしまい，これは失敗であることが明らかとなります。

なぜ失敗したのかといえば，もともとの式 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ は $a,\ b,\ c$ の三つの文字について対称，つまりどの文字にもかたよりがないのに対して，いまやった変形は a と b にだけ注目したものになっているところに原因があるのです。

言い替えると，この式の処理の方法は，$a,\ b,\ c$ の三つの文字いずれも平等に扱うようなものであればうまくいく可能性が高まるわけです。

それでは，先の考えは ab だけに注目していましたが，残りの $bc,\ ca$ の二つも同時に2倍すれば，うまくいくでしょうか？ 残念ですが，どうやってもうまくいかないでしょう。

実際，$2ab$ を処理するには a^2 と b^2 が必要。しかしここに a^2 と b^2 を使ってしまうと，$2bc$ や $2ca$ を処理することができなくなってしまうからです。

ではどうすればよいでしょう？ ここまでくれば気がつく人もいるかもしれないですね。

a^2 なども二つずつあれば，うまくいくのです。

しかしそれでも $+ab+bc+ca$ が残ってしまってはまずい。そこで解答例のように処理するわけです。よく味わってください。

解答例

$$\begin{aligned}(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \\ &= \frac{1}{2}\{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-ca\} \\ &= \frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\} \\ &= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\end{aligned}$$

$a,\ b,\ c$ は実数なので，$a-b,\ b-c,\ c-a$ は実数。よって

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqq 0$$

ゆえに

$$(\text{左辺})-(\text{右辺}) \geqq 0$$

よって

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$$

■

類題 13

$$a^2+b^2+c^2+\frac{3}{4} \geqq a+b+c$$

が成り立つことを証明せよ。 (99 工学院大)

(**ヒント：**$\frac{3}{4}$ は三つに分けます。)

類題 14 $a,\ b,\ c$ を正の数とする。次の不等式

$$\frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geqq \frac{3abc}{ab+bc+ca}$$

が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは $a,\ b,\ c$ がどのような関係を満たすときか述べよ。 (00 慶応大)

例題 13　$a \geqq 0$ とするとき，

$$1+\frac{1}{2}a \geqq \sqrt{1+a}$$

を証明せよ。　(98 甲南大 (部分))

解説　右辺に根号のついた式が入っており，こういったものを扱うときには次の定理を使って証明すべき不等式を少し変形するのが常識です。

定理　$a>0,\ b>0$ のとき

$$a>b \quad \Longleftrightarrow \quad a^2>b^2$$

定理は正の数で書きましたが，不等号 $>$ を $\geqq$ で置き換えたものにしてもよく，本例題ではそっちのほうを使うことになります。もう一度書くと，

定理　$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ のとき

$$a \geqq b \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 \geqq b^2$$

です。

つまり今の場合，

$$1+\frac{1}{2}a \geqq \sqrt{1+a}$$

を証明するかわりに，

$$\left(1+\frac{1}{2}a\right)^2 \geqq \left(\sqrt{1+a}\right)^2$$

を証明すればよい，ということです。そして，このようにしてよいことを，きちんと答案の中で断ることが必要です。書き方は，解答例をよく見てください。

後は前例題と同様で，左辺から右辺を引いて，$\geqq 0$ を確かめることになります。

解答例　a は 0 以上なので，$1+\frac{1}{2}a$ も $\sqrt{1+a}$ も 0 以上。よって 2 乗しても同値。そこで

$$\left(1+\frac{1}{2}a\right)^2 \geqq \left(\sqrt{1+a}\right)^2$$

を証明する。

$$\begin{aligned}(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= \left(1+\frac{1}{2}a\right)^2-(1+a)\\ &= 1+a+\frac{1}{4}a^2-1-a\\ &= \frac{1}{4}a^2 \geqq 0\end{aligned}$$

　よって
$$\left(1+\frac{1}{2}a\right)^2 \geqq \left(\sqrt{1+a}\right)^2$$
が成り立つ。

　ゆえに,
$$1+\frac{1}{2}a \geqq \sqrt{1+a}$$
が証明された。

類題 15 $|ad+bc| \leqq \sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}$ を証明せよ。

(99 京都産業大・理，工 (部分))

類題 16
$$|x+y| \leqq |x|+|y|$$
を証明せよ。　(97 大阪教育大 (部分))

(**ヒント：** x が実数のとき，$x \leqq |x|$, $|xy|=|x||y|$ である。)

類題 17 $a,\ b$ を正の実数とするとき,
$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$
を証明せよ。　(98 山形大)

例題 14　$a,\ b$ を正の数とするとき，

$$\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right) \geqq 8$$

を証明せよ。　(95 専修大)

解説　先の例題の類題として「相加平均・相乗平均の不等式」を証明してもらいました。もう一度掲載すると次のようなものです。

定理 (相加平均・相乗平均の不等式)　$a,\ b$ を正の実数とするとき，

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

本例題ではこの不等式を使うことになりますが，まず「$a>0,\ b>0$」という仮定に注意してください。そして，解答例でこの仮定の確認をしていることにも注目してください。これがないと，解答例としてはかなりの減点になる部分です。

また，多くの場合は上の不等式で分母を払った形，つまり

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$$

の形で適用することが多いし，本例題ではこの形で使うことにります。

解答例

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= ab+2+2+\frac{4}{ab}\\ &= 4+ab+\frac{4}{ab}\end{aligned}$$

ここで，$a>0,\ b>0$ より，$ab>0$。よって $\dfrac{4}{ab}>0$。
相加平均・相乗平均の不等式より，

$$\begin{aligned}4+ab+\frac{4}{ab} &\geqq 4+2\sqrt{ab\times\frac{4}{ab}}\\ &= 4+2\sqrt{4}\\ &= 4+4\\ &= 8\end{aligned}$$

類題 18　$x>0$ のとき，$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{4}{x}\right) \geqq 9$ が成り立つことを証明せよ。
(97 千葉工業大 (改))

類題 19 $a,\ b,\ c$ を正の数とするとき，不等式

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{c}\right)\left(c+\frac{9}{a}\right) \geqq 48$$

が成り立つことを証明せよ。　　　　　　　　　　(99 東北学院大・法，教養)

例題 15　$a>0,\ b>0$ のとき，$\dfrac{a+b}{4},\ \dfrac{\sqrt{ab}}{2},\ \dfrac{ab}{a+b}$ の大小を比較せよ。

(90 徳島文理大)

解説　問題は一般的ですね。どこから手をつけたらいいのか，見当がつきません。

こういったときには，$a,\ b$ として条件を満たす具体的な値をとってみて状況を観察するのがいいでしょう。

たとえば $a=1,\ b=2$ としましょうか。すると，

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{4} &= \frac{3}{4}\\ \frac{\sqrt{ab}}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{ab}{a+b} &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

どれがいちばん大きく，またいちばん小さいかすぐ分かりますか? これでは分かりにくいので，通分しましょう。

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{4} &= \frac{3}{4}=\frac{9}{12}\\ \frac{\sqrt{ab}}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{6\sqrt{2}}{12}\\ \frac{ab}{a+b} &= \frac{8}{12}\end{aligned}$$

う〜む，$\dfrac{a+b}{4}$ と $\dfrac{ab}{a+b}$ の大小は分かりましたが，$\dfrac{\sqrt{ab}}{2}$ の位置が分かりにくいですね。でも，$\sqrt{2}=1.414\cdots$ であることから，

$$6\sqrt{2}=8.485\cdots$$

がわかります。

よって

$$\frac{a+b}{4}>\frac{\sqrt{ab}}{2}>\frac{ab}{a+b}$$

らしい[3]。

いやいや速断しないでください。ここではあくまでも 1 つの例だけで判断をしていますので，一般的にはどうなのか，は分かりません。特に $a=b$ のときには，すべて等しくなります (確かめよ!)。

ということは，

$$\frac{a+b}{4}\geqq\frac{\sqrt{ab}}{2}\geqq\frac{ab}{a+b}$$

[3]実は $a=1,\ b=4$ とすると，こんなめんどうなことをしなくてもすみます。確かめてください。

らしいと。

しつこいようですが，もう一度強調しておきます。これはあくまでも予想です。

しかし，１つの手がかりは得られました。そこでまずは証明をはじめてみましょう。そしてもしうまくいかなければ，成り立たないような $a,\ b$ の値をさがしてみる，という二段がまえでいきましょう。

$$\frac{a+b}{4} \geqq \frac{\sqrt{ab}}{2} \geqq \frac{ab}{a+b}$$

を証明するには,

$$\frac{a+b}{4} \geqq \frac{\sqrt{ab}}{2}$$

と

$$\frac{\sqrt{ab}}{2} \geqq \frac{ab}{a+b}$$

を証明すればいいですね[4]。

後は解答例に委せますが，幸いにして，この問題では正しいことが分かります。面倒な問題でなくてラッキーでした。

補注　大分古い問題で恐縮です。しかし，よく分からないときには具体的な数値で状況を調べてみる，という手法を要求する問題が最近少ないように感じられるので，とりあげてみました。

ちなみに，見当をつける部分は解答例には含めなくても構いません。■

解答例　$a=1,\ b=4$ とすると,

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{4} &= \frac{5}{4} \\ \frac{\sqrt{ab}}{2} &= \frac{\sqrt{4}}{2} = 1 \\ \frac{ab}{a+b} &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

より,

$$\frac{a+b}{4} \geqq \frac{\sqrt{ab}}{2} \geqq \frac{ab}{a+b}$$

と予想される。

（イ） $\dfrac{a+b}{4} \geqq \dfrac{\sqrt{ab}}{2}$ の証明

[4] $\dfrac{a+b}{4} \geqq \dfrac{ab}{a+b}$ を示す必要はありません。理由は?
分からない人は，不等式の性質を復習してください。

$$
\begin{aligned}
\frac{a+b}{4}-\frac{\sqrt{ab}}{2} &= \frac{a+b-2\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{4} \geqq 0
\end{aligned}
$$

よって

$$\frac{a+b}{4} \geqq \frac{\sqrt{ab}}{2}$$

（ロ）$\dfrac{\sqrt{ab}}{2} \geqq \dfrac{ab}{a+b}$ の証明

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{ab}}{2}-\frac{ab}{a+b} &= \frac{(a+b)\sqrt{ab}-2ab}{2(a+b)} \\
&= \frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{2(a+b)} \\
&= \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2(a+b)} \geqq 0
\end{aligned}
$$

よって，

$$\frac{\sqrt{ab}}{2} \geqq \frac{ab}{a+b}$$

以上をまとめると，

$$\frac{a+b}{4} \geqq \frac{\sqrt{ab}}{2} \geqq \frac{ab}{a+b} \quad \cdots \textbf{(答)}$$

類題 20 $0<a<b<c<d$ のとき，$\dfrac{a}{d}$，$\dfrac{c}{b}$，$\dfrac{a+c}{b+d}$，$\dfrac{ac}{bd}$ の大小を比較せよ。

(90 関西大)

例題 16　$x,\ y,\ z \geqq 0$ とするとき，すべての自然数 n に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $\dfrac{x^n+y^n}{2} \geqq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$　　(2) $\dfrac{x^n+y^n+z^n}{3} \geqq \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^n$

(97 埼玉大)

解説　最後の例題は，ちょっと面倒なものをあげておきます。

与えられた不等式には，自然数 n がからんでいますので，普通の左辺から右辺を引いて正をいうのが難しければ数学的帰納法を使うことが考えられます。
この例題の場合はまさにそれです。

数学的帰納法は，自然数 n に関する命題 $P(n)$ が成り立つことを

(I) 命題 $P(1)$ が成り立つ。

(II) $P(k)$ が成り立つと仮定すると，$P(k+1)$ が成り立つ。

のふたつのステップを経て証明する方法でした。
等式の場合はそうでもありませんが，不等式を証明する場合，二番目のステップを示すのが結構面倒です。本例題で，その方法に慣れてください。

さて，まずは $n=1$ の場合を見ましょう。
$n=1$ のとき，

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{x^1+y^1}{2} = \frac{x+y}{2}\\ (\text{右辺}) &= \left(\frac{x+y}{2}\right)^1 = \frac{x+y}{2}\end{aligned}$$

ですから，与えられた不等式は確かに成り立っています。
次に $n=k$ のときに不等式が成り立つと仮定しましょう。つまり

$$\frac{x^k+y^k}{2} \geqq \left(\frac{x+y}{2}\right)^k$$

が成り立つと仮定します。
分数だと計算が面倒ですから，両辺とも分母を払っておきましょう。すると，

$$2^k(x^k+y^k) \geqq 2(x+y)^k$$

となります。

　このとき
$$\frac{x^{k+1}+y^{k+1}}{2} \geqq \left(\frac{x+y}{2}\right)^{k+1}$$
が成り立つことを証明したいわけです。これも分母を払っておけば，

$$2^{k+1}(x^{k+1}+y^{k+1}) \geqq 2(x+y)^{k+1}$$

を証明すればいいことになります。
　定跡通り左辺引く右辺を作りましょう。すると，

$$2^{k+1}(x^{k+1}+y^{k+1}) - 2(x+y)^{k+1}$$

となりますが，ここからどうやっていいのかちょっと悩みます。
　なんとかして仮定の
$$2^k(x^k+y^k) \geqq 2(x+y)^k$$
を使いたいのですが，どうすればいいでしょう?
　等式の証明になれた人なら，$2(x+y)^{k+1} = 2(x+y)^k(x+y)$ に気がつき，ここに仮定の右辺があることが分かることと思います。
　等式の場合にはそのまま代入すればいいのですが，不等式の場合にはどうなるでしょう。
　$2^{k+1}(x^{k+1}+y^{k+1}) - 2(x+y)^{k+1}$ の第 2 項を，

$$2^k(x^k+y^k) \geqq 2(x+y)^k$$

の右辺を用いて左辺に置き換えたいわけです。
　ここで $a > b$ ならば $c-a < c-b$ であることを思いだしましょう。つまり小さいものを引いたものは大きなものを引いたものより大きくなるのです (う〜む，分かりにくい表現だ)。
　よって $2^{k+1}(x^{k+1}+y^{k+1}) - 2(x+y)^k(x+y)$ の $2(x+y)^k$ を $2^k(x^k+y^k)$ で置き換えると，そちらの方が小さい，つまり

$$2^{k+1}(x^{k+1}+y^{k+1}) - 2(x+y)^{k+1} \geqq 2^{k+1}(x^{k+1}+y^{k+1}) - 2^k(x^k+y^k)(x+y)$$

となります。
　以下解答例のような変形を続けると，結局 $2^k(x-y)(x^k-y^k)$ という式が得られます。つまり

$$2^{k+1}(x^{k+1}+y^{k+1}) - 2(x+y)^{k+1} \geqq 2^k(x-y)(x^k-y^k)$$

です。
　ここにもう 1 つの関門があります。
　最後の $2^k(x-y)(x^k-y^k)$ は $\geqq 0$ でしょうか?

$x,\ y$ のどちらが大きいのかは仮定されていません。それゆえ困るわけですが，次の定理を思いだせば，解決します。

定理　$a > 0,\ b > 0$ のとき

$$a > b \iff a^k > b^k$$

つまり $x - y$ と $x^k - y^k$ の符号は同じです。よって $x,\ y$ のいずれが大きくても，

$$(x - y)(x^k - y^k) \geqq 0$$

これで解決です。

(2) は類題としておきましょう。

解答例

$$2^n(x^n + y^n) \geqq 2(x + y)^n$$

を数学的帰納法で証明する。

まず $n = 1$ のとき，

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= 2^1(x^2 + y^2) = 2(x + y) \\ (\text{右辺}) &= 2(x + y)^1 = 2(x + y) \end{aligned}$$

なので不等式は成り立つ。

次に $n = k$ のとき不等式が成り立つと仮定する。つまり

$$2^k(x^k + y^k) \geqq 2(x + y)^k$$

が成り立つと仮定する。

さて，

$$\begin{aligned} & 2^{k+1}(x^{k+1} - y^{k+1}) - 2(x + y)^{k+1} \\ = {} & 2^{k+1}(x^{k+1} - y^{k+1}) - 2(x + y)^k(x + y) \\ \geqq {} & 2^{k+1}(x^{k+1} - y^{k+1}) - 2^k(x^k + y^k)(x + y) \\ = {} & 2^k\{2x^{k+1} + 2y^{k+1} - (x^k + y^k)(x + y)\} \\ = {} & 2^k(x^{k+1} - x^k y + y^{k+1} - y^k x) \\ = {} & 2^k\{x^k(x - y) - y^k(x - y)\} \\ = {} & 2^k(x - y)(x^k - y^k) \end{aligned}$$

ここで，$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ なので，$x - y$ と $x^k - y^k$ は同符号。よって

$$2^k(x - y)(x^k - y^k) \geqq 0$$

ゆえに

$$2^{k+1}(x^{k+1} + y^{k+1}) \geqq 2(x + y)^{k+1}$$

■

類題 21 例題の (2) を証明せよ。

類題 22 例題の不等式は一般化できないでしょうか? 考えてみてください。

第2章　実践問題

2.1　はじめに

入試対策編の後半は，過去数年の入試問題に取材しました。過去に似たような問題を見つけることができなかったものの，興味深い内容をもつものを紹介しています。ここにも私の好みが反映しています。

それぞれの問題に解答例を与えてみましたが，別解も可能なものもいくつかあります。研究してみてください。

2.2 問題集

1. a は正数とする。
命題「ある実数 x について $ax^2 < 0$ ならば $a < 0$ である」の対偶をいえ。
(01 東京慈恵会医大)

2. 正数 $a,\ b$ に対し，$a * b = \dfrac{ab}{a+b+1}$ と定義する。正数 $a,\ b,\ c$ に対し，次を証明せよ。

(1) $a * b = a * c$ ならば，$b = c$

(2) $(a * b) * c = a * (b * c)$ (92 熊本工業大)

3. 次の命題を証明せよ。
n を自然数とする。連続する n 個の自然数の和が n の倍数となるためには，n が奇数であることが必要十分条件である。 (01 会津大)

4. 命題「$x^3 + y^3 + z^3 = 0,\ x + y + z = 0$ のとき，$x,\ y,\ z$ の少なくとも一つは 0 である」の真偽をいえ。また，真のときに証明を，偽のときには反例を挙げよ。
(01 立教大 (部分))

5. $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ は 0 でない実数であり，次の（1）～（7）の命題がすべて成立しているとする。
（1）「$a > 0$ または $c > 0$」ならば $f > 0$
（2）「$b < 0$ かつ $f > 0$」ならば $a > 0$
（3）$d > 0$ ならば $g < 0$
（4）$c < 0$ ならば「$b > 0$ または $d > 0$」
（5）$e > 0$ ならば「$a < 0$ かつ $d > 0$」
（6）「$a > 0$ または $e < 0$」ならば $b < 0$
（7）$g > 0$
このとき $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ それぞれの正負を，理由をつけて判定せよ。
（94 京都教育大）

ヒント 普通 $a > 0$ の否定は $a \leqq 0$ となるのだが，問題の設定から $a \neq 0$ であるので，$a > 0$ の否定は $a < 0$ である。

6. n が正の整数のとき，$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ が成り立つことを示せ。 (94 早稲田大 (部分))

7. $2n+1$ 個の正の数 $a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n,\ k$ があり，$\dfrac{a_1}{b_1} < \dfrac{a_2}{b_2} < \cdots < \dfrac{a_n}{b_n} < k$ を満たすとき，$\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} < k$ が成り立つことを証明せよ。

(92 滋賀大)

8. $a>0,\ b>0$ に対し，不等式 $\dfrac{a^5+b^5}{a^2+b^2} \geqq \dfrac{a^4+b^4}{a+b}$ が成り立つことを示せ。
(98 岡山理大)

9. 正の数 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ に対して $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$ なるとき，

(1) $\dfrac{{a_1}^2}{a_1+a_2} \geqq \dfrac{3a_1-a_2}{4}$ であることを示せ。

(2) $\dfrac{{a_1}^2}{a_1+a_2}+\dfrac{{a_2}^2}{a_2+a_3}+\cdots+\dfrac{{a_{n-1}}^2}{a_{n-1}+a_n}+\dfrac{{a_n}^2}{a_n+a_1} \geqq \dfrac{1}{2}$
が成り立つことを示せ。 (95 東邦大)

10. $a>0,\ d>0$ とする。$a_1=a,\ a_2=a+d,\ a_3=a+2d,\ a_4=a+3d$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

(1) $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_4} > \dfrac{4}{a_1+a_4}$

(2) $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4} > \dfrac{8}{a_1+a_4}$ (93 熊本工業大)

11. $a,\ b,\ c$ を自然数とするとき，次の不等式を証明せよ。

(1) $\dfrac{1}{2^a}+\dfrac{1}{2^b}+\dfrac{1}{2^c} \leqq \dfrac{3}{2}$

(2) $2^{a+b}+2^{b+c}+2^{c+a} \leqq 2^{a+b+c+1}-4$ (00 大阪教育大)

12. n 個の実数が 1 組与えられている。そこから小さいものを順に k を取り，その和を $S(k)$ とする。このとき次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{k}S(k) \leqq \frac{1}{n}S(n)$$

(90 法政大)

13. $p>0,\ q>0,\ p+q=1$ のとき，関数 $f(x)=x^2$ について次の不等式が成り立つことを示せ。

$$f(px_1+qx_2) \leqq pf(x_1)+qf(x_2)$$

(95 早稲田大 (部分))

14. n を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1) 不等式 $n! \geqq 2^{n-1}$ を示せ。

(2) 不等式 $\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}<2$ を示せ。

(3) 不等式 $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}<3$ を示せ。 (01 名古屋市大)

15. 実数 x に対して実数をとる関数 $f(x)$ がある。任意の実数 x, y に対して $f(x+y)=f(x)f(y)$ が成立するとき，次の (1)〜(4) が成り立つことを示せ。

(1) $f(1)=\left\{f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right\}^2$

(2) すべての実数に対して， $f(x)\geqq 0$ かつ $f\left(\dfrac{x}{2}\right)=\sqrt{f(x)}$ である。

(3) すべての x, y に対して，$f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\leqq\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ である。

(4) $f(0)\neq 0$ のとき，すべての実数 x に対して，$f(x)>0$ である。

(01 関西学院大)

「講義と演習」シリーズ
入試問題編 5　式と証明
執 筆 者　小浪吉史
発 行 日　平成 14 年 8 月 9 日