

「講義と演習」シリーズ 入試問題編 3

# 実数の性質

小浪吉史

平成 14 年 1 月 1 日



# 「講義と演習」シリーズについて

<sup>ちまた</sup> 巷には数多くの参考書があふれています。しかしそれらはページ数の制約から、また入試問題の解説という目的から、教科書レベルの内容は理解しているものという前提で作られていることが多いようです。

一方最近の教科書は、授業において教師による説明が補われることを期待し、読んだだけで理解できるようにできていないものが多く、少し数学の苦手なものが教科書だけを手がかりに勉強していくことは大変な困難を伴うように見えます。

これは数学は苦手なものの、自ら勉強しなにかしようという意欲を持つ生徒にとって、大変つらい状況でしょう。

このシリーズは、そういった意欲を持った人に自習教材を提供することを目的に書かれたものです。そしてこの目的を達成するために、授業に相当する講義編と、参考書などで解説されているような演習編で構成しています。

「講義編」の本文ではできるだけストーリー性をもたせ、さまざまな考え方を順に積み重ねていき、それによって数学というものが一つの構築物であることが見えてくるように解説しています。

また本文に入れると話の筋が見えなくなる恐れがあるものの、できることならみなさんに知っておいてもらいたいと思ったテーマを付録で簡単に解説しました。この部分は、これから数学の教員になろう、あるいは現に教えていらっしゃる方々にも場合によったら参考になるかとも思い、かなり踏み込んだものまで取り上げてみました(もともと、本シリーズは私の講義ノートのようなものですから、自分の心覚えという意味もあります)。

演習編は二つの部分に分け、「基礎演習編」では、講義編で扱った例題なども含め、それだけでも順に読み、類題を解いていけば理解できるように編集してみました。

また「入試問題編」では、前半で入試問題を解くときに現れるテクニックを解説し、後半では、内容的に複雑で難しいもの、特に入試問題から取材した問題を提示、解答例を付しました。これは、読者として最終的に理工系の大学、あるいは国公立の文科系の大学への進学を考えている人、あるいは将来数学を道具として使うことが予想される人たちを想定したからです。

しかしながら一言ご注意申し上げます。それは、「入試問題編」は入試問題を題材にしていますが、これは入試の傾向を調べたものではないということです。つ

まりどの問題を選択し、取り上げているかの選択基準には、私の好みがかなり反映しているということです。この点を、あらかじめ御了承ください。

初めて読むときには難しさを感じるかもしれませんが。しかし2度3度と読むにつれて、それぞれの言葉の意味が頭に定着し、理解が深まっていくことでしょう。あきらめずに何度も読み、何度もチャレンジしてください。

また高校で数学を離れる予定の人は、講義編をしっかりと学習するだけでもかなりの効果があると思います。

生身の教師による講義のときは、わからないことが生じたならすぐに質問し、質問者の知識と理解度、性格などにあった答えが得られるのに対して、このような印刷物による講義ではそれは不可能です。逆に通常の講義は一度聞いたらそれっきり、同じことを繰り返し聞くことはたいていの場合不可能であるのに対して、こういった印刷物なら納得がいくまで繰り返し繰り返し読むことができます。この二つのよい点だけが実現できると最高です。そのためには、適当な指導者を見つけ、その人のもとで添削を受けながら勉強すると、より効果的でしょう。

このような特徴をよく理解した上で、本シリーズに取り組んでもらえれば、読者の理解は深まり、センスは一段と向上するであろうと思います。皆さんの健闘を期待し、実力アップを願っています。

小浪 吉史

2002年1月1日

# 目次

|            |                     |           |
|------------|---------------------|-----------|
| <b>第1章</b> | <b>基礎テクニック</b>      | <b>3</b>  |
| 1.1        | はじめに . . . . .      | 3         |
| 1.2        | 根号を含む式の計算 . . . . . | 4         |
| 1.3        | 分母の有理化 . . . . .    | 10        |
| 1.4        | 背理法 . . . . .       | 11        |
| 1.5        | 有理数と無理数 . . . . .   | 16        |
| 1.6        | 有理数 . . . . .       | 18        |
| 1.7        | 循環小数 . . . . .      | 20        |
| 1.8        | 実数の小数展開 . . . . .   | 21        |
| 1.9        | 絶対値 . . . . .       | 23        |
| <b>第2章</b> | <b>実践問題</b>         | <b>25</b> |
| 2.1        | はじめに . . . . .      | 25        |
| 2.2        | 問題集 . . . . .       | 26        |
| 2.3        | 解説・解答集 . . . . .    | 28        |



# 第1章 基礎テクニック

## 1.1 はじめに

本分冊は，入試問題編です。一通り高校での数学の学習を終えている，つまり高校3年間で学習する知識を仮定し，入試問題でよく現れる問題を取り上げ，解き方のテクニックを紹介します。それゆえ，問題を解くためにはなんでもあり。使えるものは何でも使うという方針で解説しています。

とはいうものの，例題の選択，そして解答例にはかなり私の好みが反映しています。それゆえ，申し訳ありませんが入試の出題傾向に即しているとは限らないことをお断りしておきます。

## 1.2 根号を含む式の計算

例題 1  $x = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}, y = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$  のとき, 次の式の値を求めよ。

(1)  $x + y$

(2)  $xy$

(3)  $x^2 + y^2$

解説 問題集だと「式の値」というような項目に分類される問題です。式の値を求める問題にはいくつかのパターンがありますが, これはその第一弾です。

さて, この例題で計算することを要求された  $x + y, xy, x^2 + y^2$  という式は,  $x$  と  $y$  を入れ替えても変わらない, という著しい性質を持っています。実際たとえば  $x + y$  で  $x$  と  $y$  を入れ替えた式は  $y + x$  となりますが, これは  $x + y$  に等しい (残りの二つについてもこれが成り立っていることを確かめてください。またこのような性質を持つ例と持たない例を作ってみてください)。

このような特徴を持つ式を 対称式 と呼びます。

一般的な定義を与えると,

定義 (対称式)  $x, y$  に関する整式  $P(x, y)$  について

$$P(x, y) = P(y, x)$$

を満たすものを 対称式 という<sup>1</sup>。

となります。

また,

定義 (基本対称式)  $x + y, xy$  を 基本対称式 という。

さらに対称式について次の定理が成り立ちます。

定理 (対称式の性質) どんな対称式も基本対称式によって表わされる。

この定理の証明は, 高校数学の範囲を超えているので信用してください。

ちょっと注意すべきは, この定理は対称式が基本対称式を使って表わせるということは保証しているものの, では具体的にどのように変形すれば良いのかについてまったく言及していない, ということです。しかしこういった保証がなければ, 対称式に出会うたびに「こいつは基本対称式で表わされるのだろうか, こっちのはどうだろう」と考えなければならなくなります。一方この定理があるおかげ

<sup>1</sup>文字  $x$  に注目した式を  $P(x)$  などと表したのと同様に, 二つの文字  $x, y$  に注目した式を  $P(x, y)$  などと表しています。



げで我々は「必ず基本対称式で表わせる」と確信し、その変形を探すことに専念できます。

中学校までの数学ではこのようなタイプの定理はありませんでした。よってその意味することの重大さをなかなか感じ取れないかもしれません。ま、今はそれでも構いません。もっと先を勉強することで、理解できるようになるでしょう。

さて例題です。与えられた式のうち  $x + y$ ,  $xy$  は基本対称式ですから問題はあ  
りません。一方  $x^2 + y^2$  は対称式ですが、基本対称式ではありません。よって上の  
定理によって、これは基本対称式  $x + y$ ,  $xy$  によって表わすことができるはずで  
す。では具体的にどうやったらいいのでしょうか。次のようにやります。

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= x^2 + 2xy + y^2 - 2xy \\ &= (x + y)^2 - 2xy\end{aligned}$$

因数分解のところで「こんな形になってれば因数分解できるのに」という考え  
方を紹介しました。ここでもその考え方を使っています。実際  $x^2 + y^2$  は  $+2xy$  が  
あれば  $(x + y)^2$  と因数分解できます（ここに基本対称式  $x + y$  と  $xy$  が現れてい  
ることに注意！）。そこで必要なもの  $2xy$  を付け加え、同じもの  $2xy$  を引くこと  
によって帳尻を合わせればいいわけです（因数分解をしやすくするために、足す  
位置を変えてあります）。結果として得られた式  $(x + y)^2 - 2xy$  は、まさに「基本  
対称式によって表わされ」ています。

後はこれに(1)(2)で計算した  $x + y$ ,  $xy$  の値を代入することで計算できます。

このとき分母に根号のついた数のまま代入すると計算がちょっと面倒です。そこ  
で準備として  $x$ ,  $y$  の分母を有理化しておきます。

解答例 与えられた二つの数の分母を有理化すると、

$$\begin{aligned}x &= \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \\ &= 7 - 4\sqrt{3} \\ y &= \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \\ &= 7 + 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

(1)

$$x + y = (7 - 4\sqrt{3}) + (7 + 4\sqrt{3}) = 14 \cdots (\text{答})$$

(2)

$$xy = (7 - 4\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3}) = 49 - 48 = 1 \cdots (\text{答})$$

(3)

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\ &= 14^2 - 2 \times 1 \\ &= 196 - 2 \\ &= 194 \dots (\text{答})\end{aligned}$$

類題 1 (1)  $x = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1}$ ,  $y = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1}$  のとき, 次の式の値を求めよ。

(i)  $x + y$                       (ii)  $xy$                       (iii)  $x^2 + y^2$                       (iv)  $x^3 + y^3$

(ヒント:  $x^3 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2$  である。さらに  $-3x^2y - 3xy^2$  を因数分解すると?)

(2)  $x = \frac{2}{\sqrt{3} + 1}$ ,  $y = \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$  のとき, 次の式の値を求めよ。

(i)  $x^2 + y^2$                       (ii)  $(x - y)^2$                       (iii)  $(1 - x)(1 - y)$

(ヒント: これらが対称式であることを確認せよ (特に (ii) に注意)。また計算の準備として  $x + y$ ,  $xy$  を作れ。)

例題 2  $x = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$  のとき，次の式の値を求めよ。

(1)  $3x^3 + 4x^2 - 9x - 1$

(2)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

(98 阪南大・流通)

解説 (1) 素直に代入して計算するのは，あまりうまい方法ではありません。というのは，代入する式の次数が高く (例題の場合は3次)，その計算は面倒です。このような問題の場合，与えられた式の次数を下げる工夫をするのがうまいやりかたです。

この例題の場合，まず  $x = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$  を次のように変形します。

まず分母を払って

$$3x = 1 + \sqrt{7}$$

1 を移項して

$$3x - 1 = \sqrt{7}$$

両辺を2乗して整理すると

$$9x^2 - 6x - 6 = 0$$

今の場合は全部3で割ることができるので，実行すると

$$3x^2 - 2x - 2 = 0$$

つまり， $3x^2 - 2x - 2$  に  $x = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$  を代入すると0となります。

ここまで準備しておいて，与えられた式  $3x^3 + 4x^2 - 9x - 1$  を  $3x^2 - 2x - 2$  で割り，商と余りを求めると，

$$3x^3 + 4x^2 - 9x - 1 = (3x^2 - 2x - 2)(x + 2) - 3x + 3$$

よって， $3x^3 + 4x^2 - 9x - 1$  に  $x = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$  を代入したときの値を求めるには， $(3x^2 - 2x - 2)(x + 2) - 3x + 3$  に  $x = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$  を代入して計算すればよいこととなります。

ところが  $3x^2 - 2x - 2 = 0$  でしたから，はじめのかけ算のところは0となり，結局  $-3x + 3$  に代入すればよいこととなります。この計算は容易です。

ここで紹介した方法は，次数を下げて何らかの値を求めるときの常識的なテクニックなのでよく慣れておいてください。

(2) は、まず  $\frac{1}{x}$  を求めます。これは与えられた  $x = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$  の分母と分子を入れ換えればよい。そのままでは計算しにくいので、分母を有理化しておきます。後は式の通り、 $\frac{1}{x^2}$  と  $\frac{1}{x^3}$  を計算し、素直に足せば OK です。

解答例 (1)  $x = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$  の分母を払って変形すると、

$$3x^2 - 2x - 2 = 0$$

一方、

$$3x^3 + 4x^2 - 9x - 1 = (3x^2 - 2x - 2)(x + 2) - 3x + 3$$

よって  $3x^3 + 4x^2 - 9x - 1$  に  $x = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$  を代入したときの値は、

$$\begin{aligned} 3x^3 + 4x^2 - 9x - 1 &= (3x^2 - 2x - 2)(x + 2) - 3x + 3 \\ &= -3 \times \frac{1+\sqrt{7}}{3} + 3 \\ &= -1 - \sqrt{7} + 3 \\ &= 2 - \sqrt{7} \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(2)  $\frac{1}{x} = \frac{3}{\sqrt{7}+1}$  の分母を有理化すると、

$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} &= \frac{(\sqrt{7}-1)^2}{2^2} \\ &= \frac{8-2\sqrt{7}}{4} \\ &= \frac{4-\sqrt{7}}{2} \\ \frac{1}{x^3} &= \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{(4-\sqrt{7})(\sqrt{7}-1)}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{7}-11}{4} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{\sqrt{7}-1}{2} + \frac{4-\sqrt{7}}{2} + \frac{3\sqrt{7}-11}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{7}-5}{4} \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

類題 2  $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  のとき，次の式の値を求めよ。

(1)  $x + \frac{1}{x}$

(2)  $x - \frac{1}{x}$

(3)  $x^2 + \frac{1}{x^2}$

(4)  $x^2 - \frac{1}{x^2}$

(5)  $x^3 + \frac{1}{x^3}$

(6)  $x^3 - \frac{1}{x^3}$

(ヒント：(3) は，(1) を 2 乗してみると求められるでしょう。後の三つは，因数分解。)

(98 安成造形大)

類題 3  $x$  の式  $x - \frac{1}{x} = 1$  について，次の問いに答えよ。

(1)  $x - \frac{1}{x} = 1$  を満たす正の数  $x$  を求めよ。

(2) このとき， $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1$  の値を求めよ。

(98 広島工大)

## 1.3 分母の有理化

例題 3  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}$  の分母を有理化せよ。 (99 日本工大)

解説  $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$  のような式の方母の有理化については、講義編で扱いました。ここでは、今一步進めて、分母に三つの項がある式の方母の有理化をする問題をやりましょう。

式の形が複雑なので、いっぺんに片付けることはできません。まずは、 $\sqrt{2}$  と  $\sqrt{3}$  の一方を分母から追い出すことを、考えましょう。

どちらを追い出すと決めても計算は可能ですが、今の場合  $\sqrt{3}$  の方を追い出す方が計算が簡単になります<sup>2</sup>。

分母は  $\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$  で、 $\sqrt{3}$  を追い出すと決めたので、

$$(\sqrt{2} + 1) + \sqrt{3}$$

と考え、 $\sqrt{2} + 1$  を一つのものと考えましょう。

すると、分母分子にかけるのは  $(\sqrt{2} + 1) - \sqrt{3}$ 。

これを計算すると、分母は  $2\sqrt{2}$  と、かなり簡単な形になります。この分母を有理化するのは、容易でしょう。

解答例の式変形をよく見て、細かいところをきちんとチェックしてください。

補注  $\sqrt{2}$  を追い出すことにして、計算してみてください。

解答例

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + 1)^2 - 3} \\ &= \frac{2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 2}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6} - 4}{2} \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

類題 4  $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$  の分母を有理化せよ。

<sup>2</sup>なぜなら、 $3 = 1 + 2$  だからです。

といっても、これだけではなんだかわからないことでしょう。でもわざと説明しないことにします。以下の計算をよく検討して、なぜ  $\sqrt{3}$  を追い出すことにしたのか、考えてください。

## 1.4 背理法

例題 4  $\sqrt{3}$  が無理数であることを用いて,  $2 + 3\sqrt{3}$  が無理数であることを証明せよ。

解説 背理法の使い方の練習問題です。

「講義編」において  $\sqrt{2}$  が無理数であることの証明をするときに, 背理法を使いました。その際には「 $n^2$  が偶数ならば  $n$  は偶数である」ということの証明など, 準備がいろいろと必要であり, 複雑でした。ここではできるだけ単純な設定で, 背理法を練習してみましょう。

さて背理法は結論を否定してみることから始まります。今の場合結論は「 $2 + 3\sqrt{3}$  が無理数である」です。これを否定すると, 「 $2 + 3\sqrt{3}$  は無理数でない」となります。これはつまり「 $2 + 3\sqrt{3}$  は有理数である」ということです。まずはこの言い換えができるかどうか, ポイントになります。

次にこの言い換えを使って議論を進め, 矛盾を導きます。

今の場合, 有理数  $q$  を使って

$$2 + 3\sqrt{3} = q$$

という等式が成り立ちます。これを  $\sqrt{3}$  について解くと,

$$\sqrt{3} = \frac{q-2}{3}$$

となります。ここで右辺は  $(q-2) \div 3$  ということであり,  $q-2$  は有理数から有理数を引く (2 は有理数であった!) ので有理数。それを有理数 3 で割るので結果も有理数。つまり  $\frac{q-2}{3}$  は有理数であることが, 結論できます。しかしこれは無理数  $\sqrt{3}$  に等しいので, 無理数と有理数が等しいということになります。これは矛盾。この矛盾は「 $2 + 3\sqrt{3}$  は有理数である」ということから生じたものです。よって「 $2 + 3\sqrt{3}$  は有理数である」ということはありえません。

ゆえに, 「 $2 + 3\sqrt{3}$  が無理数である」ことが結論できるわけです。

解答例  $2 + 3\sqrt{3}$  が有理数であるとすると, 有理数  $q$  を使って

$$2 + 3\sqrt{3} = q$$

が成り立つ。

これを  $\sqrt{3}$  について解くと,

$$\sqrt{3} = \frac{q-2}{3}$$

右辺は有理数の引き算と割り算なので,  $\frac{q-2}{3}$  は有理数。

一方  $\sqrt{3}$  は無理数だったから、これは矛盾。ゆえに、 $2 + 3\sqrt{3}$  は無理数である。

類題 5  $\sqrt{2}$  が無理数であることを用いて、 $3 - 4\sqrt{2}$  が無理数であることを証明せよ。



例題 5  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{6}$  は無理数である。このことを用いて、次の命題を証明せよ。

「有理数  $a$ ,  $b$  のうち少なくとも一つが 0 でないならば、 $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$  は無理数である」  
(01 慶応大)

解説 もう一つ、少し複雑な問題で背理法の使い方の練習をしましょう。

問題で要求されている「 $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$  が無理数である」ことを直接証明するのは、困難です。こういったときには、背理法で証明します。つまり今の場合「 $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$  が有理数である」として、矛盾を導くという考え方をします。ここで、使ってよいとされている「 $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{6}$  は無理数である」と矛盾することを示すことになるであろうことも、視野に入れておいてください。

しかし、 $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  が無理数であることは、使いそうですが、 $\sqrt{6}$  が無理数であることは、どこで使うのでしょうか？ すぐには、思いつきません。しかし、 $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$  であることと思えば、使い道、ひいては解法の手がかりが得られるでしょう。

実際、 $(a\sqrt{2} + b\sqrt{3})^2$  を展開すると、 $\sqrt{6}$  が現れ、ついでに  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  の二つがいったん消えます。

さて、証明すべき命題の仮定「有理数  $a$ ,  $b$  のうち少なくとも一方が 0 でない」はどう使ったらいいでしょうね。そのためには、上に書いた  $(a\sqrt{2} + b\sqrt{3})^2$  を計算してみるといいかもしれません。

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = q$$

とおいて、両辺を 2 乗し、展開すると、

$$2a^2 + 2ab\sqrt{6} + 3b^2 = q^2$$

となります。後は、先の例題と同じように、この式を  $\sqrt{6}$  について解きます。しかしそのときにちょっと注意が必要です。なぜならば、まず  $2a^2$ ,  $3b^2$  を移項して、

$$2ab\sqrt{6} = q^2 - 2a^2 - 3b^2$$

となりますが、 $\sqrt{6}$  について解くためには、両辺を  $2ab$  で割らなければなりません。しかし、 $2ab \neq 0$  なのでしょうが？

そんなことは、仮定は「有理数  $a$ ,  $b$  のうち少なくとも一方が 0 でない」なので、保証されてはいません。

ということは、「有理数  $a$ ,  $b$  のうち少なくとも一方が 0 でない」という仮定は  $a$ ,  $b$  についてどのような場合に成り立っているのかを分析し、それぞれの場合について検討する必要がある、ということです。

「有理数  $a, b$  のうち少なくとも一方が 0 でない」は、次の三つの場合を考えられます：

(1)  $a \neq 0, b \neq 0$  の場合

(2)  $a = 0, b \neq 0$  の場合

(3)  $a \neq 0, b = 0$  の場合

(1) の場合，

$$2ab\sqrt{6} = q^2 - 2a^2 - 3b^2$$

の両辺は  $2ab$  で割ることができるので、 $\sqrt{6}$  について解くことができ、左辺は無理数、右辺は有理数の四則計算になっているので、有理数。これで矛盾が出ました。

(2) の場合は、もとの  $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$  は  $b\sqrt{3}$  となり、これを  $q$  とおいた式の両辺を  $b$  で割って ( $b \neq 0$  ですから、これは可能です)、矛盾が出ます。

(3) の場合は、(2) と同様です。

解答例  $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$  が、有理数であるとする。

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = q \cdots (*)$$

とおく。両辺を 2 乗すると、

$$2a^2 + 2ab\sqrt{6} + 3b^2 = q^2 \cdots (**)$$

(1)  $a \neq 0, b \neq 0$  とすると、 $ab \neq 0$ 。

(\*\*) を  $\sqrt{6}$  について解くと、

$$\sqrt{6} = \frac{q^2 - 2a^2 - 3b^2}{2ab}$$

仮定より左辺は無理数であるが、右辺は有理数の四則計算になっているので有理数。よって、矛盾。

(2)  $a = 0, b \neq 0$  のとき。

(\*) に代入すると、

$$b\sqrt{3} = q^2$$

よって、

$$\sqrt{3} = \frac{q^2}{b}$$

となり、左辺は無理数であるが、右辺は有理数。これも矛盾。

(3)  $a \neq 0, b = 0$  のとき。

(\*) に代入して (2) と同様の变形をすると,

$$\sqrt{2} = \frac{q^2}{a}$$

となり, (2) と同じ理由により矛盾。

(1), (2), (3) より,  $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$  は無理数である。

類題 6 以下の問いに答えよ。ただし,  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$  が無理数であることは使ってよい。

(1) 有理数  $p, q, r$  について,  $p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3} = 0$  ならば,  $p = q = r = 0$  であることを示せ。

(2) 有理数係数の 2 次式  $f(x) = x^2 + ax + b$  について,  $f(1), f(1 + \sqrt{2}), f(\sqrt{3})$  のいずれかは無理数であることを示せ。 (99 京大 (改))

## 1.5 有理数と無理数

### 例題 6 等式

$$(3 + 2\sqrt{2})x + (2 - 2\sqrt{2})y = 17 - 2\sqrt{2}$$

を満たす有理数  $x, y$  を求めよ。

解説 初めてこの手の問題に出会うと面食らうことでしょう。実際どこから手をつけたらいいのか、見当がつかないからです。

まず（恐らくみなさんが軽視しているであろう）「 $x, y$  は有理数である」という条件に注目しましょう。この問題は、 $x, y$  が有理数でないと成立しません。

さらに次の定理が成り立ちます。

定理 (有理数の性質)  $a, b$  を有理数とする。このとき  $a + b\sqrt{2} = 0$  ならば  $a = 0, b = 0$

証明には背理法を使います。復習を兼ねてやってみましょう。

まず  $b \neq 0$  とします。 $a + b\sqrt{2} = 0$  を  $\sqrt{2}$  について解くと、

$$\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$$

右辺は有理数の商であるから有理数。よって矛盾。ゆえに  $b = 0$ 。

このとき  $a + b\sqrt{2} = a + 0 \times \sqrt{2} = a$  となるので  $a + b\sqrt{2} = 0$  より  $a = 0$  となります。ゆえに  $a = 0, b = 0$ 。

この定理から次の定理が得られます。

定理 (有理数の性質 2)  $a, b, c, d$  を有理数とする。このとき  $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$  ならば  $a = c, b = d$

実際  $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$  を移項して整理すると、

$$(a - c) + (b - d)\sqrt{2} = 0$$

よって前定理より  $a - c = 0, b - d = 0$ 。ゆえに  $a = c, b = d$ 。

注意 定理では  $a + b\sqrt{2}$  など  $\sqrt{2}$  となっていますが、これは  $\sqrt{2}$  に限らず、無理数なら何でも構いません。そのことを、上の証明をよく観察することで納得してください。

さて例題です。与えられた等式を「有理数の性質」の定理か、「有理数の性質 2」の定理の仮定の形に変形します。今の場合、「有理数の性質 2」の仮定の形に変形する方が楽でしょう。すると、

$$(3x + 2y) + (2x - 2y)\sqrt{2} = 17 - 2\sqrt{2}$$

を得ます。よって上の定理より、連立方程式

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases}$$

を得ます。

後はこれを解けばよい ( $17 - 2\sqrt{2} = 17 + (-2\sqrt{2})$  であることに注意)。

解答例 与式を変形すると、

$$(3x + 2y) + (2x - 2y)\sqrt{2} = 17 - 2\sqrt{2}$$

よって連立方程式

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases}$$

を得る。

これを解いて、

$$x = 3, y = 4 \cdots (\text{答})$$

類題 7 次の等式を満たす有理数  $x, y$  を求めよ。

(1)  $x + y\sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}$

(2)  $(2 + 3\sqrt{3})x + (2\sqrt{3} - 3)y = 7\sqrt{3} - 4$

## 1.6 有理数

例題 7 整数を足し算，引き算，かけ算した結果はやはり整数になることを使って，有理数の四則計算の結果はやはり有理数であることを証明せよ。

解説 この問題は，将来数学を必要とするもの以外は飛ばして，先に進んでも構いません。

有理数の四則計算の結果がやはり有理数になることは，証明が必要です。ここではそれを「整数の足し算，引き算，かけ算，をした結果はやはり整数になる」ということを仮定して，実行して見せましょう。以下においてこの事実がどのように使われているか，よく観察してください。

まず有理数とは何かの復習をしましょう。

定義 (有理数)  $m, n$  (ただし  $m \neq 0$ ) を整数とするとき

$$\frac{n}{m}$$

と表わすことのできる数を 有理数 (rational numbers) という。

特に  $m \neq 1$  のとき 分数 という。

よって，二つの有理数  $\frac{n}{m}, \frac{n'}{m'}$  を考え，これらの和差積商が再び有理数になることを示せばよい (この時， $m \neq 0, m' \neq 0$  であることにも注意してください)。

まず和を計算するには，通分しなければなりません。通分したときの分母は  $m$  と  $m'$  の最小公倍数をとればよいのですが，今の場合は  $mm'$  として構いません。これは計算結果が約分できるかどうか，このように文字で計算しているときにははっきりしないこと，それから，約分できるかどうかは，今示そうとしている足し算の結果が有理数になるかどうかには影響しないことによっています。このように，状況に応じてさまざまな考え方を変えていくことに慣れてください。

すると

$$\frac{n}{m} = \frac{nm'}{mm'}, \quad \frac{n'}{m'} = \frac{n'm}{mm'}$$

となります。分母が同じになったので，後は計算するだけ。実行すると，

$$\begin{aligned} \frac{n}{m} + \frac{n'}{m'} &= \frac{nm'}{mm'} + \frac{n'm}{mm'} \\ &= \frac{nm' + n'm}{mm'} \end{aligned}$$

「整数を足し算，引き算，かけ算した結果はやはり整数になる」ので，分子の  $nm' + n'm$  と分母の  $mm'$  はいずれも整数になっています。またここで， $mm' \neq 0$ 。

よって有理数の和は「 $m, n$  (ただし  $m \neq 0$ ) を整数とすると、 $\frac{n}{m}$ 」の形に表わすことができたこととなります。つまり、有理数の和は有理数である、と結論できるわけです。

解答例

$$\begin{aligned}\frac{n}{m} + \frac{n'}{m'} &= \frac{nm'}{mm'} + \frac{n'm}{mm'} \\ &= \frac{nm' + n'm}{mm'}\end{aligned}$$

仮定より「整数を足し算、引き算、かけ算した結果はやはり整数になる」ので、分子の  $nm' + n'm$  と分母の  $mm'$  はいずれも整数。また、 $mm' \neq 0$ 。よって有理数の和は有理数である。

類題 8 例題でやり残した部分を証明せよ。

## 1.7 循環小数

例題 8 循環小数  $0.\dot{1}24$  を分数の形に直せ。

解説 問題に取り掛かる前に、一つ記号を説明しておきましょう。

循環小数とは、「ある位から同じ数字が繰り返し現れるような小数」のことでした。たとえば  $0.12341234\cdots$  がそうです。この循環小数の場合、数字の列 1234 が繰り返されています。これを、この循環小数の循環節 といいます。そこでこの循環節の始まりの数字の上と終わりの数字の上に点をうち、 $0.\dot{1}23\dot{4}$  とし、循環小数を表わすことにします。

たとえば  $1.2345345\cdots$  は  $1.2\dot{3}4\dot{5}$  であり、 $0.3333\cdots$  は  $0.\dot{3}$  となります。後者の場合、循環節の始まりと終わりが同じなので、このように点は一つのみとなります。

すると問題に与えられている循環小数  $0.\dot{1}24$  は、 $0.124124\cdots$  を表わしていることとなります。

さて、これを小数に直すには次のようにします。この循環節は 124 の三桁ずつ繰り返されています。そこでこの三桁を左に三桁ずらせば  $124.124124\cdots$  となり（今の場合）小数点以下が一致します。では三桁左にずらすにはどうすればよいでしょう？  $0.124\cdots$  を  $10^3 = 1000$  倍すればいいですね。

一般に循環節が  $n$  桁あるときには、 $10^n$  倍すればよいこととなります。

後の計算は、解答例を見てください。

解答例

$$x = 0.124124\cdots \quad (1)$$

とおく。

$$1000x = 124.124124\cdots \quad (2)$$

(2) から (1) を引くと

$$999x = 124$$

よって

$$x = \frac{124}{999} \cdots (\text{答})$$

類題 9 次の循環小数を分数の形に直せ。

(1)  $0.\dot{8}$

(2)  $0.\dot{2}\dot{7}$



## 1.8 実数の小数展開

例題 9  $\frac{1}{3-\sqrt{7}}$  の整数部分を  $a$  , 小数部分を  $b$  とするとき ,  $3a^2 - ab - 2b^2$  の値を求めよ。 (99 防衛大)

解説 まずは分母を有理化しましょう。すると

$$\frac{1}{3-\sqrt{7}} = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$$

ここで ,  $2 < \sqrt{7} < 3$  ですから ,  $\sqrt{7} = 2.\dots$ 。よって  $3 + \sqrt{7} = 5.\dots$  です。ゆえに

$$\frac{3+\sqrt{7}}{2} = 2.\dots$$

となります。

よって整数部分は , 2。小数部分は  $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$  から 2 を引けば得られるので ,

$$\frac{3+\sqrt{7}}{2} - 2 = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$$

後は , これを与式に代入して計算するだけです。

解答例 分母を有理化すると

$$\frac{1}{3-\sqrt{7}} = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$$

ここで ,  $2 < \sqrt{7} < 3$  であるから ,  $\sqrt{7} = 2.\dots$ 。よって  $3 + \sqrt{7} = 5.\dots$  である。ゆえに

$$\frac{3+\sqrt{7}}{2} = 2.\dots$$

よって整数部分は , 2。つまり  $a = 2$ 。

小数部分は  $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$  から 2 を引けば得られるので ,

$$\frac{3+\sqrt{7}}{2} - 2 = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$$

つまり  $b = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$ 。

ゆえに,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= 3 \cdot 2^2 - 2 \times \frac{\sqrt{7}-1}{2} - 2 \times \left( \frac{\sqrt{7}-1}{2} \right)^2 \\ &= 12 - \sqrt{7} + 1 - 4 + \sqrt{7} \\ &= 9 \dots (\text{答})\end{aligned}$$

類題 10  $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$  の整数部分を  $a$ , 小数部分を  $b$  とする。

(1)  $a, b$  の値を求めよ。

(2)  $a^2 + 2ab + 3b^2$  の値を求めよ。

(97 神奈川大・経(改))

類題 11  $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$  の整数部分を  $a$ , 小数部分を  $b$  とするとき,  $a, b, b^2 + 2b - 2$  の値をそれぞれ求めよ。

(96 松山大・法(一部))

## 1.9 絶対値

例題 10 方程式  $x^2 - 3|x - 1| - 1 = 0$  を解け。

解説 絶対値を含む方程式です。

まずは絶対値の復習をしましょう。実数  $a$  の絶対値  $|a|$  とは、

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

でした。つまり、絶対値の中の符号によって、結果の値が異なってくるのです。

この問題の場合  $|x - 1|$  ですから、その中身  $x - 1$  の符号によって方程式が変わってきます。ではどのように変わるでしょう？

上の絶対値の定義をそのままあてはめると、

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & (x - 1 \geq 0) \\ -(x - 1) & (x - 1 < 0) \end{cases}$$

となります。かっこの中の式  $x - 1 \geq 0$  と  $x - 1 < 0$  を変形すれば  $x \geq 1$  と  $x < 1$  を得ます。よって場合分けは、 $x \geq 1$  の場合と、 $x < 1$  の場合となります。

まず  $x \geq 1$  の場合。

このとき  $|x - 1| = x - 1$  ですから、元の方程式は

$$x^2 - 3(x - 1) - 1 = 0$$

となり、かっこをはずして整理すると、

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

これを解けば、

$$x = 1, 2$$

となります。

このとき 1 も 2 も 1 以上ですから、場合分けの条件  $x \geq 1$  を満たしています。よってこれらは求める解となっています。

次に  $x < 1$  の場合。

このときは  $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$ 。よって元の方程式は

$$x^2 - 3(-x + 1) - 1 = 0$$

整理すると、

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

これを解くと,

$$x = -4, 1$$

このとき,  $x < 1$  を満たすのは  $-4$  のみ。ゆえに, この場合の解は  $x = -4$ 。  
以上をまとめると,  $x = 1, 2, -4$  が解となります。

それぞれのところで, 得られた解と, 条件とをつき合わせて『吟味』<sup>ぎんみ</sup>をしていることに注意してください。得られたものが無条件に答えになるとは限りません。さて答案にまとめましょう。

解答例 (1)  $x \geq 1$  の場合  
元の方程式は

$$x^2 - 3(x - 1) - 1 = 0$$

よって

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

これを解いて

$$x = 1, 2$$

これらは条件を満たす。

(2)  $x < 1$  の場合  
このとき元の方程式は

$$x^2 - 3(-x + 1) - 1 = 0$$

よって

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

これを解くと,

$$x = 1, -4$$

今  $x < 1$  であるから,  $x = 1$  は不適。よって  $x = -4$ 。  
よって解は

$$]x = 1, 2, -4 \cdots (\text{答})$$

類題 12 次の方程式を解け。

(1)  $x^2 - 2|x| - 6 = 0$

(2)  $x^2 - 3|x + 2| - 4 = 0$

## 第2章 実践問題

### 2.1 はじめに

入試対策編の後半は，過去数年の入試問題に取材しました。過去に似たような問題を見つけることができなかったものの，興味深い内容をもつものを紹介しています。ここにも私の好みが見られます。

それぞれの問題に解答例を与えてみましたが，別解も可能なものもいくつかあります。研究してみてください。

## 2.2 問題集

- $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  とするとき,  $a^3 + b^3$ ,  $a^6 + b^6$  の値を求めよ。  
(01 宮崎大)
- 自然数  $n$  に対して  $x = \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}$ ,  $y = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$  とおく。このとき,  $\left(x + \frac{1}{|x|}\right) \left(|y| + \frac{1}{y}\right)$  は 32 の倍数であることを証明せよ。  
(97 愛媛大)
- $\sqrt{2\sqrt{3}-1}$  は無理数であることを証明せよ。  
(90 埼玉大)
- $n$  を自然数とする。 $\sqrt{n^2+1}$  の整数部分を  $a$ , 小数部分を  $b$  とするとき,  $-a + \frac{1}{b}$  の値を求めよ。  
また,  $-a + \frac{1}{b} = 5\sqrt{2}$  となる  $n$  の値を求めよ。  
(99 愛知工大)
- $a, b$  は実数で,  $G_n = a^n + b^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) とする。 $a + b$  および  $ab$  がともに有理数であるとき,  $G_n$  は有理数となることを数学的帰納法を用いて証明せよ。  
(96 富山県立大)
- $a, b, c, d, e$  を実数とする。
  - $f(x) = ax + b$  とする。たがいに異なる二つの有理数  $p_1, p_2$  に対し,  $f(p_1), f(p_2)$  がともに有理数であるとき,  $a, b$  は共に有理数であることを示せ。
  - $g(x) = cx^2 + dx + e$  とする。たがいに異なる三つの有理数  $q_1, q_2, q_3$  に対し,  $g(q_1), g(q_2), g(q_3)$  がすべて有理数であるとき,  $c, d, e$  はすべて有理数であることを示せ。  
(00 東京女子大)
- $a, b, c, d$  が有理数であって,  $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$  であれば,  $a = c$ ,  $b = d$  であることを示せ。なお,  $\sqrt{2}$  が無理数であることは, 証明なしに用いてよい。
  - $n$  は正の整数であるとする。 $(3 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$  を満たす整数  $a_n, b_n$  が存在することを示せ。
  - (2) と同じ記号を用いるとき,  $(3 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$  であることを示せ。  
(91 京都教育大)
- 次の問いに答えよ。

(1)  $\log_2 5$  は無理数であることを証明せよ。

(2)  $p \geq 2, q \geq 1$  なる整数  $p, q$  に対して,  $\{\log_p(p+1)\}^{\frac{1}{q}}$  は無理数であることを証明せよ。  
(98 岩手大)

9.  $xy$  平面上の点  $(a, b)$  は,  $a$  と  $b$  がともに有理数のときに有理点と呼ばれる。 $xy$  平面において, 三つの頂点がすべて有理点である正三角形は存在しないことを示せ。ただし, 必要ならば  $\sqrt{3}$  が無理数であることは証明なしに使ってよい。

(99 大阪大)

---

「講義と演習」シリーズ  
入試問題編 3 実数の性質  
執筆者 小浪吉史  
発行日 平成 14 年 1 月 1 日

---

©Yoshifumi Konami 2001