

「講義と演習」シリーズ 入試問題編 4

集 合

小浪吉史

平成 14 年 1 月 1 日

「講義と演習」シリーズについて

^{ちまた} 巷には数多くの参考書があふれています。しかしそれらはページ数の制約から、また入試問題の解説という目的から、教科書レベルの内容は理解しているものという前提で作られていることが多いようです。

一方最近の教科書は、授業において教師による説明が補われることを期待し、読んだだけで理解できるようにできていないものが多く、少し数学の苦手なものが教科書だけを手がかりに勉強していくことは大変な困難を伴うように見えます。

これは数学は苦手なものの、自ら勉強しなにかしようという意欲を持つ生徒にとって、大変つらい状況でしょう。

このシリーズは、そういった意欲を持った人に自習教材を提供することを目的に書かれたものです。そしてこの目的を達成するために、授業に相当する講義編と、参考書などで解説されているような演習編で構成しています。

「講義編」の本文ではできるだけストーリー性をもたせ、さまざまな考え方を順に積み重ねていき、それによって数学というものが一つの構築物であることが見えてくるように解説しています。

また本文に入れると話の筋が見えなくなる恐れがあるものの、できることならみなさんに知っておいてもらいたいと思ったテーマを付録で簡単に解説しました。この部分は、これから数学の教員になろう、あるいは現に教えていらっしゃる方々にも場合によったら参考になるかとも思い、かなり踏み込んだものまで取り上げてみました(もともと、本シリーズは私の講義ノートのようなものですから、自分の心覚えという意味もあります)。

演習編は二つの部分に分け、「基礎演習編」では、講義編で扱った例題なども含め、それだけでも順に読み、類題を解いていけば理解できるように編集してみました。

また「入試問題編」では、前半で入試問題を解くときに現れるテクニックを解説し、後半では、内容的に複雑で難しいもの、特に入試問題から取材した問題を提示、解答例を付しました。これは、読者として最終的に理工系の大学、あるいは国公立の文科系の大学への進学を考えている人、あるいは将来数学を道具として使うことが予想される人たちを想定したからです。

しかしながら一言ご注意申し上げます。それは、「入試問題編」は入試問題を題材にしていますが、これは入試の傾向を調べたものではないということです。つ

まりどの問題を選択し、取り上げているかの選択基準には、私の好みがかなり反映しているということです。この点を、あらかじめ御了承ください。

初めて読むときには難しさを感じるかもしれませんが。しかし2度3度と読むにつれて、それぞれの言葉の意味が頭に定着し、理解が深まっていくことでしょう。あきらめずに何度も読み、何度もチャレンジしてください。

また高校で数学を離れる予定の人は、講義編をしっかりと学習するだけでもかなりの効果があると思います。

生身の教師による講義のときは、わからないことが生じたならすぐに質問し、質問者の知識と理解度、性格などにあった答えが得られるのに対して、このような印刷物による講義ではそれは不可能です。逆に通常の講義は一度聞いたらそれっきり、同じことを繰り返し聞くことはたいていの場合不可能であるのに対して、こういった印刷物なら納得がいくまで繰り返し繰り返し読むことができます。この二つのよい点だけが実現できると最高です。そのためには、適当な指導者を見つけ、その人のもとで添削を受けながら勉強すると、より効果的でしょう。

このような特徴をよく理解した上で、本シリーズに取り組んでもらえれば、読者の理解は深まり、センスは一段と向上するであろうと思います。皆さんの健闘を期待し、実力アップを願っています。

小浪 吉史

2002年1月1日

目次

第1章 基礎テクニック	3
1.1 はじめに	3
1.2 集合算	4
1.3 有限集合の要素の個数	9
1.4 集合と演算	14
第2章 実践問題	18
2.1 はじめに	18
2.2 問題集	19
2.3 解説・解答集	21

第1章 基礎テクニック

1.1 はじめに

本分冊は，入試問題編です。一通り高校での数学の学習を終えている，つまり高校3年間で学習する知識を仮定し，入試問題でよく現れる問題を取り上げ，解き方のテクニックを紹介します。それゆえ，問題を解くためにはなんでもあり。使えるものは何でも使うという方針で解説しています。

とはいうものの，例題の選択，そして解答例にはかなり私の好みが反映しています。それゆえ，申し訳ありませんが入試の出題傾向に即しているとは限らないことをお断りしておきます。

1.2 集合算

例題 1 A, B を集合 U の部分集合とすると、 $\overline{\overline{A} \cup (A \cap \overline{B})}$ を簡単にせよ。

解説 似たような問題を講義編や基礎演習編で扱っています。ここではもう少し複雑なものをやっておきましょう。

さて集合算の性質は、講義編で解説しておきました。まずはそこにどんな性質があったか、ざっと眺め直しておいてください。

さて、かっこのついた式の計算と同じように、順々に簡単な形に変形していきます。

まず \overline{A} と $A \cap \overline{B}$ の和集合 $\overline{A} \cup (A \cap \overline{B})$ の補集合は、ド・モルガンの法則を使うと、 $\overline{\overline{A} \cup (A \cap \overline{B})}$ と変形できます。

$\overline{\overline{A}}$ は A に等しく、 $\overline{(A \cap \overline{B})}$ に再びド・モルガンの法則を適用すれば、 $\overline{(A \cap \overline{B})} = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}}$ となるので、 $\overline{\overline{A} \cup (A \cap \overline{B})}$ は $A \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}})$ に等しいことがわかります。

また $\overline{\overline{B}} = B$ であり、 $A \cap (\overline{A} \cup B)$ に今度は分配法則を適用すると、 $(A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$ を得ます。

$A \cap \overline{A} = \phi$ (空集合) と $\phi \cup (A \cap B) = A \cap B$ より、結論を得ます。

数式における変形は通い慣れた道なので、ここでやったように、一々どの計算法則を使っているのか確かめながら変形をしていくことはありません。しかし本来はここでやってみせたようにすべきものなのです。集合算にはまだ慣れていないので、特にこういった吟味を各自きちんとやっておくべきでしょう。それがより高度で複雑な式変形を理解し、自分のものとしていくときに役に立つことでしょう。

さあ、一つ一つの変形に、集合算のどのような性質を用いたのか、確認しながらもう一度、下の解答例を解読してみてください。

解答例

$$\begin{aligned}\overline{\overline{A} \cup (A \cap \overline{B})} &= \overline{\overline{A}} \cap \overline{(A \cap \overline{B})} \\ &= A \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) \\ &= A \cap (\overline{A} \cup B) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) \\ &= \phi \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B\end{aligned}$$

$A \cap B \dots$ (答)

類題 1 A, B を集合 U の部分集合とするとき, $\overline{A \cap (\overline{A} \cup B)}$ を簡単にせよ。

例題 2 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ を全体集合として, その部分集合を $A = \{2, 3, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ とするとき, 次の集合を求めよ。

(1) $A \cap B$

(2) \bar{A}

(3) $\bar{A} \cup B$

(4) A のすべての部分集合

(5) $\overline{A \cap B}$

(6) $\overline{A \cup \bar{A}}$ (93 札幌学院大)

解説 集合算の基本的なところが理解できているかどうか, を見る問題ですね。

(4) と (6) 以外は, 素直に計算していけばいいでしょう。

(4) は, 「基礎演習 編」でやりました。要素の個数で場合分けしていけばよいのでした。空集合とそれ自身を忘れないように!

(6) は, 「ド・モルガンの法則」を用いてもいいし, $A \cup \bar{A} = U$ という性質を用いてもいいですね。

解答例 (1) $A \cap B = \{3, 7\}$

(2) $\bar{A} = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$

(3) $\bar{A} \cup B = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

(4) $\phi, \{2\}, \{3\}, \{7\}, \{8\},$

$\{2, 3\}, \{2, 7\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{3, 8\}, \{7, 8\},$

$\{2, 3, 7\}, \{2, 3, 8\}, \{2, 7, 8\}, \{3, 7, 8\}, \{2, 3, 7, 8\}$

(5) $\overline{A \cap B} = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$

(6) $A \cup \bar{A} = \bar{U} = \phi$

類題 2 全体集合を $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ として, その部分集合 A, B, C について, 以下の問いに答えよ。ただし, \bar{A}, \bar{B} は, A, B の補集合を意味する。

(1) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ のとき, $\bar{A} \cap \bar{B}$ を求めよ。

(2) $A \cap C = \{2, 7\}, B \cap C = \{2, 4\}$ のとき, $(A \cup B) \cap C$ を求めよ。

(95 産能大)

例題 3 全体集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ の部分集合を A, B および C とし, $C = \{2, 4, 6, 8\}$ とする。 $A \cup B = \{1, 2, 5, 7, 8, 9\}$, $\overline{A \cup B} = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, $A \cap \overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ であるとき, $A, B, (\overline{A \cap B}) \cup (\overline{A \cap C})$ を求めよ。 (94 国学院大・法)

解説 さてどこから手をつけましょうか。まずは二つの集合 A と B がどのような要素で構成されているのかを突き止めることでしょう。

しかし一般には A と B には共通部分があるので, まずそこに何があるのかから考えましょう。すると, $\overline{A \cup B} = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ という設定がそれを簡単に与えてくれることに気がつきます。

実際ド・モルガンの法則から, $\overline{A \cup B} = \overline{A \cap B}$ なので, これの補集合をとれば $A \cap B$ を取り出すことができます。よって $A \cap B = \{1, 5\}$ 。

次に, 今共通部分 $A \cap B$ が知れたので, A に入っているが, B に入っていない部分, あるいは B に入っているが, A に入っていない部分, 式で書けば $A \cap \overline{B}$ か, $B \cap \overline{A}$ がわかれば A か B がわかるでしょう。実際, $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ だからです。

そう考えて問題の設定を見ると, $\overline{A \cap \overline{B}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ となっています。よってこれから $A \cap \overline{B}$ が簡単に求められ, $A \cap \overline{B} = \{8\}$, つまり $A = \{1, 5, 8\}$ を得ます。

また, $B \cap \overline{A} = (A \cup B) \cap \overline{A}$ より, $B \cap \overline{A} = \{2, 7, 9\}$ 。ゆえに $B = \{1, 2, 5, 7, 9\}$ となります。

あとは解答例から明らかでしょう。

解答例

$$\begin{aligned} A \cap B &= \overline{\overline{A \cap B}} \\ &= \overline{\overline{A \cup B}} \\ &= \overline{\{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}} \\ &= \{1, 5\} \end{aligned}$$

次に

$$\begin{aligned} A \cap \overline{B} &= \overline{\overline{A \cap \overline{B}}} \\ &= \overline{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}} \\ &= \{8\} \end{aligned}$$

よって $A = \{1, 5, 8\}$ 。

また, $B \cap \overline{A} = (A \cup B) \cap \overline{A}$ より, $B \cap \overline{A} = \{2, 7, 9\}$ 。ゆえに $B = \{1, 2, 5, 7, 9\}$ となる。

最後に $\bar{A} \cap B = \{2, 7, 9\}$, $\bar{A} \cap C = \{2, 4, 6\}$ であるから, $(\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap C) = \{2, 4, 6, 7, 9\}$ 。

よって,

$$A = \{1, 5, 8\},$$

$$B = \{1, 2, 5, 7, 9\},$$

$$(\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap C) = \{2, 4, 6, 7, 9\}$$

類題 3 集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の部分集合 A, B について $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$, $A \cap B = \{2\}$, $\bar{A} \cap B = \{4, 6\}$ であるとき, A, B を求めよ。

(94 聖徳学園岐阜教育大)

1.3 有限集合の要素の個数

例題 4 ある大学の入学者のうち、他の a 大学、 b 大学、 c 大学を受験したものの集合を A 、 B 、 C で表す。 $n(A) = 65$ 、 $n(B) = 40$ 、 $n(A \cap B) = 14$ 、 $n(A \cap C) = 11$ 、 $n(A \cup C) = 78$ 、 $n(B \cup C) = 55$ 、 $n(A \cup B \cup C) = 99$ のとき、次の問いに答えよ。ただし $n(A)$ は A の要素の個数を表す。

- (1) c 大学を受験したものは何人か。
- (2) a 大学、 b 大学、 c 大学のすべてを受験したものは何人か。
- (3) a 大学、 b 大学、 c 大学のどれか一大学のみを受験したものは何人か。

(02 福井大)

解説 文章題です。人によっては苦手意識をもっているかもしれませんが、それは数学というより国語の問題。一字一句きちんと読んでいけば、数学の問題ほど余計なことに気を使わずに済む問題はありません。さっさと、苦手意識を克服してくださいね。

「講義 編」において、 $A \cup B$ の要素の個数を計算する公式

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

を紹介しました。ここでは、三つの集合の和集合 $A \cup B \cup C$ の要素の個数を計算する公式を紹介しましょう。下を見る前に、どんな式になるのか、みなさんなりに考えてみてください。

定理 ($A \cup B \cup C$ の要素の個数)

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

式が長いので途中で折り返してありますが、右側は3行で一つの式になっています。なぜこのような計算で $n(A \cup B \cup C)$ が計算できるのか、よい演習問題だと思いますので、考えてみてください。さらに四つの集合の和集合 $A \cup B \cup C \cup D$ の要素の個数はどうなるか、これも考えてみるといいでしょう。そしてこれら三つの式をじっと眺めると、ある種の法則性を見出すことができると思います。それがどうなるかも、考えてください。

さて例題に戻りましょう。

問題自体は、設問順に答えていけば解けるように配置されているようです。
まず $n(C)$ ですが、これはすでに知っている

$$n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C)$$

から計算できます。

次に「 a 大学, b 大学, c 大学のすべてを受験したもの」の集合は $A \cap B \cap C$ ですから、その人数は上の公式から計算することになります。しかし、 $n(B \cap C)$ の値がありません。よってこれが何とかして計算できないかどうか、を考えるわけですが、(1) で $n(C)$ を算出していますので、ここから $n(B \cap C)$ が計算できます。

最後は、 $n(A \cup B \cup C)$ から $n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)$ を引いておいて、引きすぎた $n(A \cap B \cap C)$ の2倍を加えておくことで結論が得られます。

最後の計算がこれでよいことを、ベン図を用いて確かめておいてください。

解答例 (1)

$$n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C)$$

より、

$$65 + n(C) - 11 = 78$$

よって

$$n(C) = 24 \cdots (\text{答})$$

(2) 同様の公式によって、

$$40 + 24 - n(B \cap C) = 55$$

ゆえに、

$$n(B \cap C) = 9$$

さて、

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

より、

$$99 = 65 + 40 + 24 - 14 - 11 - 9 + n(A \cap B \cap C)$$

これを解いて，

$$n(A \cap B \cap C) = 4 \dots (\text{答})$$

(3) 求める値を k とすると，

$$k = n(A \cup B \cup C) - \{n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)\} + 2n(A \cap B \cap C)$$

よって

$$k = 73 \dots (\text{答})$$

類題 4 集合 A, B, C および $A \cap B, B \cap C, C \cap A, A \cap B \cap C$ に属する要素の個数がそれぞれ $40, 50, 50, 18, 20, 15, 3$ であるとき， $A \cup B \cup C$ の要素の個数を求めよ。
(92 東邦大)

類題 5 ある製薬会社で開発した多くの薬について，3種類の病原菌 A, B, C に対する有効性を検討したところ，すべての薬が3種類の病原菌のうちの少なくとも1種類には有効であることがわかった。これらの薬のうち， A 菌に有効な薬は全体の45%， B 菌に有効な薬は全体の50%， C 菌に有効な薬は全体の55%であり，さらに A 菌にも B 菌にも有効な薬は全体の15%， B 菌にも C 菌にも有効な薬は全体の20%， C 菌にも A 菌にも有効な薬は全体の25%であることがわかった。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A, B, C 菌のすべてに対して有効な薬は全体の何%か。

(2) 1種類の病原菌に対してのみ有効な薬は全体の何%か。
(98 星薬科大)

例題 5 1 から 2000 までの自然数の集合を A とする。

- (1) A の要素のうち, 7 または 11 のいずれか一方でのみ割り切れるものの個数を求めよ。
- (2) A の要素のうち, 7, 11, 13 のいずれか一つのみで割り切れるものの個数を求めよ。 (01 奈良女子大)

解説 倍数の集合の要素の個数に関する問題と, 三つの集合の要素の個数に関する問題を合わせたものです。

7 で割り切れるものの集合を A , 11, 13 で割り切れるものの集合をそれぞれ B , C としましょう。

(1) は公式

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

を用い, これから $n(A \cap B)$ を引けば計算できます。しかし, そのためにわざわざ $n(A \cup B)$ を計算する必要はありません。実際

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$$

ですから, こちらで計算すれば直接答えが得られます。

もちろん $n(A \cap B)$ は 7 と 11 の公倍数の集合の要素の個数ですから, 77 の倍数の集合の要素の個数を求めればいいわけです。ちなみに, 7, 11, 13 は互いに素なので, それぞれをかけあわせれば最小公倍数になっています。

(2) は前例題の (3) と同じです。しかし, (1) と同じように, そのために $n(A \cup B \cup C)$ を計算するのは, ちょっと遠回りになります。

実際, 求める数を k とすると, 前例題のように,

$$k = n(A \cup B \cup C) - \{n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)\} + 2n(A \cap B \cap C)$$

ですが, さらに

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

でしたから, これを上のに代入して整理すれば,

$$\begin{aligned} k &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - 2\{n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)\} \\ &\quad + 3n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

となり, $n(A \cup B \cup C)$ を計算するために必要な値を使って k を直接計算できるのです。

解答例 (1) 7 で割り切れるものの集合を A , 11, 13 で割り切れるものの集合をそれぞれ B, C とする。

$$n(A) = 285, n(B) = 181, n(A \cap B) = 25$$

より, 求める数を l とすると,

$$l = 285 + 181 - 2 \times 25 = 416$$

よって

416 個 …(答)

(2)

$$n(A \cap B) = 25, n(B \cap C) = 13, n(C \cap A) = 21, n(A \cap B \cap C) = 1$$

と, 求める数を k とすると,

$$\begin{aligned} k &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - 2\{n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)\} \\ &\quad + 3n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

なので,

$$k = 285 + 181 + 153 - 50 - 42 - 26 + 3 = 504$$

よって

504 個 …(答)

類題 6 次の各問いに答えよ。

- (1) 1 から 1000 までの自然数のうち, 3, 5, 7 のいずれかで割り切れる数の個数を求めよ。
- (2) 1 から 1000 までの自然数のうち, 3 で割り切れるが 35 では割り切れない数の集合を A , 5 で割り切れるが 21 では割り切れない数の集合を B , 7 で割り切れるが 15 では割り切れない数の集合を C とするとき, 集合 $A \cup B \cup C$ の要素の個数を求めよ。 (95 九州東海大)

1.4 集合と演算

例題 6 Q を有理数全体の集合とするとき, 集合 $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a \in Q, b \in Q\}$ は四則演算について閉じていることを証明せよ。 (89 東京国際大)

解説 「閉じている」という言葉ははじめて聞くことでしょう。

整数全体の集合 \mathbb{Z} で説明しましょう。

整数の集合では足し算, 引き算, かけ算, 割り算の四つの計算ができます。このうち足し算, 引き算, かけ算はその結果は必ず整数ですが, 割り算は割られる数と割る数の組合せによっては整数にはなりません。このようなことを, 「 \mathbb{Z} は足し算, 引き算, かけ算について閉じている」といい, 「 \mathbb{Z} は割り算について閉じていない」といいます。

つまりその計算をした結果が「常に」その集合に属するとき, その計算方法について「閉じている」といいます。

さて。

例題は「 $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a \in Q, b \in Q\}$ が四則演算について閉じていることを証明せよ」ですから, 足し算, 引き算, かけ算, 割り算の四つのどれもが閉じていることを示せということです。

では, まず足し算について閉じていることを示しましょう。そのためには G から二つの要素をとり, それらを足した結果がやはり G に入ることを確かめることとなります。

二つの要素を $a + b\sqrt{2}$, $c + d\sqrt{2}$ としましょう。

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

です。これが G の要素であるかどうかは, $a + c$, $b + d$ が Q の要素かどうかを調べることでわかります。

有理数全体の集合 Q が四則演算について閉じていることは, 使ってもよいでしょう。

ということは, 有理数どうしの和である $a + c$, $b + d$ は Q の要素です。よって

$$(a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in G$$

です。つまり G は足し算について閉じています。

残り三つについても, 同様のことを確かめることとなります。解答例を見る前に, 計算して読者自身確かめてください。

解答例 $a + b\sqrt{2}$, $c + d\sqrt{2} \in G$ とする。

$$(a + b\sqrt{2}) \pm (c + d\sqrt{2}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2}$$

有理数全体の集合 Q は四則演算について閉じているので, $a \pm c, b \pm d \in Q$ 。
よって

$$(a + c) \pm (b + d)\sqrt{2} \in G$$

ゆえに, G は足し算, 引き算について閉じている (以上 複号同順)。
次に

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

ここで $ac + 2bd, ad + bc \in Q$ 。よって

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) \in G$$

つまり G はかけ算について閉じている。

最後に

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2} \sqrt{2}$$

ここで, $\frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}$ は有理数の四則計算をした結果なので有理数。よって

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} \in G$$

つまり G は割り算について閉じている。

以上より, G は四則演算について閉じている。

類題 7 集合 A を $A = \{a + b\sqrt{2} | a, b \text{ は整数}\}$ と定める。このとき, $\frac{1}{\sqrt{3} + 1}$ は A の要素ではないことを示せ。ただし, $\sqrt{6}$ が無理数であることを用いてもよい。
(99 山口大 (部分))

例題 7 集合 $A = \{m + n\sqrt{3} \mid m^2 - 3n^2 = 1 \text{ かつ } m, n \text{ はともに整数}\}$ について, $a \in A$ ならば $\frac{1}{a} \in A$ かつ $\frac{a}{2 + \sqrt{3}} \in A$ を示せ。 (90 同志社大 (部分))

解説 先の例題と同様ですが, きちんと確かめることがポイントです。

$\frac{1}{a} \in A$ は解答例を見ればすぐにわかるでしょうから, ここでは $\frac{a}{2 + \sqrt{3}} \in A$ を示しましょう。

$a \in A$ ですから, $a = m + n\sqrt{3}$ ($m^2 - 3n^2 = 1$, m, n は整数) と表すことができます。このとき $\frac{a}{2 + \sqrt{3}}$ の分母を有理化することで

$$\begin{aligned} \frac{a}{2 + \sqrt{3}} &= (m + n\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) \\ &= (2m - 3n) + (2n - m)\sqrt{3} \end{aligned}$$

後は $(2m - 3n)^2 - 3(2n - m)^2 = 1$ がいえれば, $\frac{a}{2 + \sqrt{3}} \in A$ が結論できます。

解答例 $a = m + n\sqrt{3}$ ($m^2 - 3n^2 = 1$, m, n は整数) と表すことができる。

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{m + n\sqrt{3}} = \frac{m - n\sqrt{3}}{m^2 - 3n^2} = m - n\sqrt{3} = m + (-n)\sqrt{3}$$

ここで

$$m^2 + 3(-n)^2 = m^2 + 3n^2 = 1$$

よって $\frac{1}{a} \in A$ 。

次に

$$\begin{aligned} \frac{a}{2 + \sqrt{3}} &= (m + n\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) \\ &= (2m - 3n) + (2n - m)\sqrt{3} \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} (2m - 3n)^2 - 3(2n - m)^2 &= 4m^2 - 12mn + 9n^2 - 3(4n^2 - 4mn + m^2) \\ &= m^2 - 3n^2 = 1 \end{aligned}$$

ゆえに $\frac{a}{2 + \sqrt{3}} \in A$ 。

類題 8 実数の集合 $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \text{ は有理数}\}$, $B = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \text{ は有理数}\}$ について考える。また, 実数の集合 X, Y に対し, 集合 $X+Y, X \circ Y$ を $X+Y = \{x+y \mid x \in X, y \in Y\}$, $X \circ Y = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$ と定める。

(1) $A \circ B$ に含まれ, $A+B$ に含まれない数を一つ挙げよ。

(2) $A \circ A = A$ を示せ。

(3) $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}$ は, $A \circ B$ に含まれないことを示せ。 (91 京都産業大)

第2章 実践問題

2.1 はじめに

入試対策編の後半は、過去数年の入試問題に取材しました。過去に似たような問題を見つけることができなかったものの、興味深い内容をもつものを紹介しています。ここにも私の好みも反映しています。

それぞれの問題に解答例を与えてみましたが、別解も可能なものもいくつかあります。研究してみてください。

2.2 問題集

1. 9で割り切れる整数全体の集合を A , 15で割り切れる整数全体の集合を B とする。 $C = \{x + y | x \in A, y \in B\}$ とするとき, C は3で割り切れる整数全体の集合と一致することを示せ。
(98 東京女子大)

2. a, b, c, x_0, y_0 は次の条件 (A), (B) を満たす整数とする。

$$(A) a \neq 0, b \neq 0 \text{ で } a \text{ と } b \text{ は互いに素} \quad (B) ax_0 - by_0 = c$$

このとき, 二つの集合 $M = \{(x, y) | ax - by = c, x, y \text{ は整数}\}$, $N = \{(x, y) | x = bt + x_0, y = at + y_0, t \text{ は整数}\}$ について

(1) $N \subset M$ を示せ。

(2) $(x_1, y_1) \in M, (x_2, y_2) \in M$ ならば, $x_1 - x_2$ は b の倍数, $y_1 - y_2$ は a の倍数であることを示せ。

(3) $M = N$ を示せ。
(93 防衛大)

3. $A = \{a + \sqrt{7}b | a, b \text{ は } a^2 = 7b^2 + 1 \text{ を満たす正の整数}\}$ とする。

(1) A は空集合でないことを示せ。

(2) x, y が A の要素のとき, xy も A の要素であることを示せ。

(94 京都産業大)

4.

(1) 次の等式を証明せよ。

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

(2) 二つの整数の平方の和で表される数の全体からなる集合を A とする。 x, y が集合 A の要素であるとき, 積 xy もまた集合 A の要素であることを証明せよ。

(3) (2) の集合 A に対して, 5 および 5^2 は A の要素であることを証明せよ。

(01 鹿児島大)

5. $M = \{1, 2, \dots, n\}$ を 1 から n までの自然数の集合, f を M から M への写像とし, $f_1 = f, f_2 = f \circ f_1 = f \circ f, f_3 = f \circ f_2 = f \circ f \circ f, \dots, f_k = f \circ f_{k-1} = f \circ f \circ \dots \circ f$ (k 個の合成), \dots とする。次の (1), (2) を証明せよ。

(1) $1, 2, \dots, n, n+1$ の中から異なる二つの p, q を選び, $f_p(1) = f_q(1)$ とすることができる。

(2) $f_1(1), f_2(1), \dots, f_n(1)$ がすべて互いに異なるならば, $f_n(1) = 1$ である。

(93 名古屋大)

「講義と演習」シリーズ

入試問題編4 集合

執筆者 小浪吉史

発行日 平成14年1月1日

©Yoshifumi Konami 2002